ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 1

Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 1

Primera Parte: *MATRICES Y DETERMINANTES*

1) Escribir las matrices definidas por las siguientes expresiones:
   a) $A \in \mathbb{R}^{2\times3}, A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 1 - 2j$
   b) $B \in \mathbb{R}^{3\times3}, B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \begin{cases} 3 & si \quad i = j \\ i + j^2 & si \quad i \neq j \end{cases}$
   c) $C \in \mathbb{R}^{3\times3}, C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \begin{cases} 2i & si \quad i < j \\ i^2 + j^2 & si \quad i \geq j \end{cases}$
   d) $D \in \mathbb{R}^{3\times2}, D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = \begin{cases} 3i - j & si \quad i \leq j \\ 0 & si \quad i > j \end{cases}$

2) Calcular la matriz $\frac{2}{3}A - 2B$ sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3) Determinar la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$ sabiendo que: $X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = I$

4) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
   Hallar:
      a) $A.B - 2.C.D$
      b) A^2
      c) $(B.C)^2$
      d) Obtener una matriz E de manera que: $A + 12.B - 3.C + E$ sea la matriz nula de orden 2.

5) Si $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = I$
   Hallar: (a) $U.V$; (b) $V.U + X$; (c) $X.Y$

6) Si $U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
   Verificar que:
      a) $U^2 = U$ y $V^2 = V$ (son matrices idempotentes)
      b) $U.V = V.U = N$

c) $U+V=I$

7) Verificar que $A.X=A.Y$ (aunque $X\neq Y$), siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-5&2&3\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}2&5&-1&-7\\-2&1&3&4\\3&2&1&2\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}3&6&0&-6\\-1&2&4&5\\4&3&2&3\end{pmatrix}$$

8) Dada la matriz A de orden n, decidir si es verdadero o falso, justificando:
$A^2=I \quad\Rightarrow\quad (I-A).(I+A)=N$

9) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\\-2&2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$

Hallar: a) $A.B.C$; b) $B^t.A^t$; c) A^2 (en el (b), A^t es la traspuesta de A)

10) Sabiendo que A y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, analizar si las siguientes igualdades se verifican o no, justificando la respuesta:

a) $(A+B).(A-B)=A^2-B^2$

b) $(A-B)^2=A^2-2A.B+B^2$

c) $(A+I).(A-I)=A^2-I$

11) a) Usar $A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&4\end{pmatrix}$ para verificar que $(A+B)^2\neq A^2+2.A.B+B^2$

b) Ofrecer una justificación para cada uno de los pasos numerados:

$$\begin{aligned}(A+B)^2&=(A+B).(A+B)\\&=(A+B).A+(A+B).B &&(1)\\&=A^2+B.A+A.B+B^2 &&(2)\end{aligned}$$

c) Verificar el resultado de la parte (b) usando las matrices A y B de la parte (a)

12) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&1&4\\-1&2&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&0&1\\1&4&2\end{pmatrix}$

Verifique que:

a) $(A+B)^t=A^t+B^t$

b) $(A.B)^t=B^t.A^t$

c) $(A^t)^t=A$

d) $(k.A)^t=k.A^t \qquad (k\in\mathbb{R})$

13) Un turista regresó de Europa con las siguientes monedas extranjeras: 1000 schillings austríacos, 20 libras esterlinas, 100 francos franceses, 5000 libras italianas y 50 marcos alemanes. El equivalente de estas monedas en pesos es: un schilling vale $ 0,055; una libra esterlina $1,8; el franco $0,2; la libra italiana $0,001 y el marco $0,4.
Hallar, trabajando con matrices, el valor en pesos de las monedas extranjeras del turista.

14) Un fabricante que elabora dos artículos, sillas y escritorios, desea fabricar 12 sillas y 20 escritorios. La fabricación de sillas requiere, por unidad, 12 unidades de madera, $\frac{1}{2}$ botella de

barniz y 6 horas/hombre. Los escritorios requieren, también por unidad, 25 unidades de madera, 2 botellas de barniz y 20 horas/hombre.
Los costos de tales requerimientos son:
-Madera: \$6 por unidad;
-Barniz: \$18 por botella;
1 hora/hombre: \$15.
Aplicar cálculo matricial para obtener:

a) El costo de elaboración de 12 sillas y 20 escritorios
b) El costo total por cada tipo de artículo.

15) Una empresa produce tres tamaños de cintas de video de dos calidades diferentes. La producción (en miles) de su planta A está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	28	36	30
Calidad 2	18	26	22

La producción de su planta B está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	32	40	35
Calidad 2	25	38	30

a) Escribir la matriz que represente la producción de cintas de ambas plantas
b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta C, la que tendría una vez y media la capacidad de la planta A. Escribir la matriz que representaría la producción de la nueva planta.
c) ¿Cuál es la producción total de las tres plantas?

16) Dadas las siguientes matrices: $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$

a) Hallar $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $P.M = Q$
b) Una fábrica produce dos artículos. La matriz P muestra en la fila 1 la cantidad de metros de hilado de algodón de dos tipos, necesarios para fabricar el artículo 1 y en la fila 2 las correspondientes al artículo 2. Si la columna 1 de Q proporciona el costo de producción de cada artículo en abril y en la columna 2 lo propio del mes de mayo, ¿qué representa la matriz M ?

17) Una compañía trabaja en cuatro plantas. Cada planta produce tres clases de productos. Cada producto requiere cinco (o menos) partes esenciales para su ensamble. La matriz A da el número de tales partes que necesitan para ensamblar una unidad de cada producto. Cada planta está programada para producir un número fijo de unidades de los tres productos durante la producción de las siguientes semanas. Tal programa lo da la matriz B. Aplique la multiplicación de matrices para determinar cuántas partes de los cinco tipos se necesitan para cubrir la producción programada en cada planta.

Productos

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{array} \text{ Partes}$$

Plantas

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \text{ Productos}$$

18) Demostrar que si $A=\left(a_{ij}\right)$ es una matriz cuadrada:

a) $B=A+A^t$ es simétrica.

b) $C=A-A^t$ es antisimétrica.

19) Demostrar:

a) El producto de dos matrices A y B, antisimétricas de orden n es una matriz antisimétrica, sí y sólo si: $A.B=-B.A$

b) Si A y B son matrices cuadradas de orden "n" simétricas, la condición necesaria y suficiente para que $(A.B)$ sea simétrica es que A y B conmuten.

20) Decimos que una matriz cuadrada A es idempotente si $A^2=A$. Demostrar que A es una matriz idempotente.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

21) Una matriz cuadrada A tal que $A^2=I$ se llama involutiva. Analizar si A es una matriz involutiva.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22) Calcular los siguientes determinantes:

$$det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad det(B)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det(C)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad det(D)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

23) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix}=0$

24) Sabiendo que A y B son matrices cuadradas de orden tres, tales que $det(A)=2$ y $det(B)=4$. Calcular aplicando propiedades:

a) $det\left(3B^{-1}\right)$

b) $det\left(-2A^tB\right)$

c) $det\left[B^{-1}\left(A^t\right)^{-1}\right]$

d) $det\left[\left(3B^t\right)^{-1}\right]$

25) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que verifique: $det\left(A-\alpha.I\right)=0$ y mostrar que $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = det\left(A\right)$ y $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = Tr\left(A\right)$

($Tr\left(A\right)$ es la traza de A, la suma de los elementos de la diagonal principal)

26) Decidir si es verdadero o falso, siendo $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, y justificar:

a) $det\left(A+B\right)=det\left(A\right)+det\left(B\right)$.

b) Si A es una matriz inversible, entonces $det\left(A\right)=0$.

c) Si A y B son inversibles, entonces $A.B$ también lo es.

d) $det\left(A.A^t\right)=\left(det\left(A\right)\right)^2$

e) $det\left(A\right)=\dfrac{1}{det\left(A^{-1}\right)}$

27) Verificar las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left(x-y\right).\left(y-z\right).\left(z-x\right)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = \left(x+y+z\right)^3$

d) Calcular: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

28) Hallar el valor de $x\in\mathbb{R}$ que verifique: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

29) Verificar, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) $det\left(A\right)=det\left(A^t\right)$

b) $det\left(A.A^t\right)=\left(det\left(A\right)\right)^2$

30) Si A es una matriz triangular, señalar condiciones necesarias y suficientes sobre A para que $det(A) \neq 0$.

31) Obtener, si existen, las inversas por el método de la adjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

32) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar: a) $A^{-1}.B^{-1}$ b) $C.(A+B).B^{-1}$ c) $C.A^{-1}.B^{-1}.D$

33) Demostrar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son regulares, entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

34) ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible y cuál es su inversa?

35) Verificar que la matriz A es igual a su inversa: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

36) a) Verificar que las matrices A y B son matrices permutables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué matriz es B respecto de A?

c) Dada $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, verificar que A y C permutan.

37) Indicar verdadero o falso, justificando:

a) $A.A^t = N \Rightarrow A = N$

b) Si A y B son matrices cuadradas y además permutables, entonces $A.B$ es idempotente.

c) Si A es idempotente y B es ortogonal entonces $B^t.A.B$ es idempotente.

d) $A+B=I \wedge A.B=N \Rightarrow A$ y B son idempotentes.

e) Si A y B son permutables $\Leftrightarrow$ $A-\alpha I$ y $B-\alpha I$ son permutables.

f) Si A y B son ortogonales de igual orden, entonces $A.B$ es ortogonal.

g) El determinante de toda matriz ortogonal es igual a 1 o a -1.

h) Si A es ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

38) a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $det(A - \lambda I) = 0$

b) Mostrar que $\lambda_1.\lambda_2 = det(A)$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)$ para los valores de λ hallados en (a).

39) Probar que si A es no singular y $B.A = N$, entonces $B = N$.

40) ¿Qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ hacen que la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no sea inversible?

41) Si el rango de una matriz cuadrada de orden n es k tal que $k < n$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas, justificando la respuesta:

a) $|A| = k$

b) $|A| = 0$

c) El número de vectores columna de A linealmente independientes es k.

d) El número de vectores filas de A linealmente independientes es n.

42) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es tal que $rg(A) = n$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta, justificando la respuesta:

a) El número de vectores fila linealmente independientes de A = número de vectores columna linealmente independientes de A.

b) $rg(A) = |A|$.

c) $n > m$.

d) $n = m$.

43) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular $x \in \mathbb{R}$ de modo que el rango de A sea 2.

b) Hallar $adj(A)$ para el valor de x hallado.

c) ¿A qué es igual el producto $A.adj(A)$?

44) Determinar los rangos de:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $C = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $D = N \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Hallar la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

45) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ verificar que $rg(A) = rg\left(A.A^t\right)$

46) Una concesionaria de automóviles vende unidades standard y de lujo, de colores rojo, azul, gris y verde. Las matrices de venta para los meses de julio y agosto son:

$$J = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} R & A & G & V \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} S \\ L \end{matrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} R & A & G & V \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} S \\ L \end{matrix} \end{array}$$

a) ¿Cuántos autos de cada modelo y color se vendieron en los dos meses?

b) Si la concesionaria tiene dos locales de venta y el segundo vendió el doble que el primero durante los dos meses, ¿cuántos autos de cada modelo y color se vendieron en total?

c) ¿Cuántos autos se habrían vendido en los dos locales (discriminando por modelo y color), si en el segundo se vendió el triple del primero?

47) Ecuaciones matriciales: Sean $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a) Si A es regular, hallar B que verifique: $A.B + C = D.E$

b) Si B es regular, hallar A que verifique: $A.B + C = D.E$

c) Hallar X si $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t .X.\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$

Segunda Parte: ***SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES***

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:
   a) Escriba la matriz de los coeficientes de cada uno de los sistemas.
   b) Determine la matriz ampliada de cada uno de ellos.
   c) Escriba cada uno de los sistemas en forma matricial.

i) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

2) Resolver por el método matricial si es posible:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$

3) Dado un sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$, donde A es de orden n y no singular, se tiene que $X = A^{-1}.B$. Deducir a partir de la expresión anterior usando operaciones y propiedades de matrices y de los determinantes, la regla de Cramer.

4) Resolver aplicando el método de Cramer si es posible:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3z = 6 \\ 3y + 4z = 5 \\ -2x + 5z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 8x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

5) Discutir la compatibilidad y determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación de Gauss o de Gauss – Jordan.

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 7z = 3 \\ -3x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

   i) Resolver por Gauss-Jordan los sistemas de ecuaciones lineales de los ejercicios 1), 2) y 4).

6) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 8 & 4\\ 4 & 0 & 8\\ 8 & 4 & 0\end{pmatrix}$. Determinar, si existe, una matriz $X\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $X.A=B$.

7) Demostrar que los siguientes sistemas tienen solamente la solución trivial:

a) $\begin{cases} x+3y+2z=0\\ 3x+7y+6z=0\\ 2x+3y+7z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0\\ 3x-4y+3z=0\\ 4x-2y+3z=0\end{cases}$

8) En los siguientes sistemas lineales, determinar todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema resultante tenga: a) solución única; b) ninguna solución; c) infinitas soluciones

i) $\begin{cases} x+ky+z=k\\ kx+y+z=1\\ x+y+kz=k^2\end{cases}$

ii) $\begin{cases} x+y-z=2\\ x+2y+z=3\\ x+y+\left(k^2-5\right)z=k\end{cases}$

iii) $\begin{cases} -4x+5y+kz=0\\ x-2y+z=1\\ 2x+ky-z=4\end{cases}$

iv) $\begin{cases} x+y+kz=4\\ z=2\\ \left(k^2-4\right)z=k-2\end{cases}$

9) Sea $A'=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 0 & b & 2\\ a & a & 4 & 4\\ 0 & a & 2 & b\end{array}\right)$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. ¿Para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$ el sistema:

a) Tiene única solución?
b) Es compatible indeterminado y el rango de la matriz del sistema es 2?
c) Es compatible indeterminado y tiene dos variables libres?
d) Es incompatible?

10) a) Clasificar el siguiente sistema para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} ax-y-z=1\\ x-ay-z=1\\ x-y-z=1\end{cases}$

b) ¿Existe una única solución particular si se fijan $a=1$ e $y=-2$? Justificar la respuesta.

11) Una caja contiene 13 monedas con las denominaciones de un centavo, cinco centavos y diez centavos, con un valor total de 83 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja? (Recordar que se buscan soluciones “naturales”)

12) Un campesino alimenta su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del tipo A suministra a una cabeza de ganado 10% de sus requerimientos diarios mínimos de proteínas y 15% de carbohidratos. El tipo B contiene, en una unidad estándar, 12% del requerimiento de proteínas y 8% del de carbohidratos. El campesino desea dar a sus animales el 100% de sus requerimientos mínimos. ¿Cuántas unidades de alimentos debe dar a cada cabeza de ganado diariamente?

13) Un grupo de 18 personas (hombres, mujeres y jóvenes) ganan un total de $ 250 por hora. Los hombres ganan $ 20 por hora, las mujeres, $ 15 por hora y los jóvenes, $ 10 por hora. Hallar el número de hombres, mujeres y jóvenes.

14) Una empresa fabrica unidades de control industrial. Sus nuevos modelos son el ARGÓN I y el ARGÓN II. Para fabricar cada unidad de ARGÓN I, utilizan 6 piezas A y 3 piezas B. Para fabricar cada unidad de ARGÓN II utilizan 10 piezas A y 8 piezas B. La empresa recibe un total de 760 piezas A y 500 piezas B de su proveedor, cada día. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede fabricar la empresa diariamente? Supóngase que se utilizan todas las partes.

15) Un departamento de Caza y Pesca Estatal suministra tres tipos de alimentos a un lago que mantiene a tres especies de peces. Cada pez de la especie I consume cada semana un promedio de una unidad de alimento 1, una unidad de alimento 2 y dos unidades de alimento 3. Cada pez de la especie II consume cada semana un promedio de tres unidades de alimento 1, cuatro unidades de alimento 2 y cinco unidades de alimento 3. Para un pez de la especie III, el consumo semanal promedio es de dos unidades de alimento 1, una unidad de alimento 2 y cinco unidades de alimento 3.
Cada semana se proporcionan al lago 15.000 unidades de alimento 1, 10.000 unidades del segundo y 35.000 del tercero. Suponemos que los tres alimentos se consumen, ¿qué población de cada especie se encontrará en coexistencia? ¿Existe una única solución?

16) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla. La compañía tiene un almacén de 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Para su producción de final de temporada la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	***Plástico***	***Aluminio***
Sillas	**1**	**1**	**2**
Mecedoras	**1**	**1**	**3**
Sillones	**1**	**2**	**5**

17) Una compañía elabora tres productos que han de ser procesados en tres departamentos. La siguiente tabla resume las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Por otro lado, las capacidades semanales se expresan para cada departamento en término de las horas de trabajo disponibles. Se desea determinar si hay combinaciones de los tres productos que aprovechen al máximo las capacidades semanales de los tres departamentos.

<table>
<tr><th rowspan="2">Departamentos</th><th colspan="3">Productos</th><th rowspan="2">Horas disponibles en la semana</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>A</td><td>2</td><td>3,5</td><td>3</td><td>1200</td></tr>
<tr><td>B</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>2300</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1400</td></tr>
</table>

18) Cuando la gente invierte dinero hay profesionales a quienes se acude en busca de orientación respecto al porfolio o cartera que mejor cubra las necesidades del inversionista. Supóngase que

un inversionista ha consultado a un experto en inversiones. Después de conversar con el cliente, el experto decide que el cliente desea una cartera que posea las siguientes cualidades:

i) El valor total de la cartera en el momento de la compra es $ 50.000.
ii) El crecimiento anual esperado en el valor de mercado es del 12 %.
iii) El factor promedio de riesgo es de 10%.0

Hay tres opciones de inversión, que aparecen en la siguiente tabla:

Inversión	***Crecimiento anual esperado en el valor de mercado***	***Riesgo previsto***
1	**16%**	**12%**
2	**8%**	**9%**
3	**12%**	**8%**

Determine si hay una estrategia de inversión que satisfaga los deseos del cliente.

19) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx - 3y = 2 \\ 2kx + (k-5)\,y = k \end{cases}$

Analizar las cinco posibilidades e indicar cuáles son las correctas, justificando:

a) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado.
b) Si $k = 2$ entonces $s = (4;2)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.
c) Si $k = -2$ el sistema es compatible indeterminado.
d) Si $k = 0$ el sistema es incompatible.
e) Si $k = -1$ el sistema es incompatible.

20) Sabiendo que $s = (1;1;1)$ es solución del sistema: $\begin{cases} 3ax + 2by + z = -4 \\ bx + y - az = 1 \\ -4x + y + 2z = -1 \end{cases}$

Analizar las cuatro posibilidades e indicar cuál es la correcta, justificando:

a) Si $a = b = -1$ el sistema es compatible indeterminado.
b) Si $a = b = -1$ el sistema es compatible determinado.
c) Si $a = b = -1$, $h = (2z;2z;z)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.
d) Si $a = b = -1$, $h' = \left(\frac{2}{5};\frac{2}{5};0\right)$ es una solución del sistema homogéneo asociado.

21) La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right)$$

Analizar las cuatro posibilidades e indicar cuál es la correcta, justificando:

a) Si $k = 1$ el sistema es incompatible.
b) Si $k = -1$ el sistema es incompatible.
c) Si $k = 0$ el sistema tiene única solución.
d) Si $k = 2$ entonces $s = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.

22) La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k^2-4 & -1 & k^2-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Analizar las cuatro posibilidades e indicar cuál es la correcta, justificando:

a) Si $k=-2$ o bien, $k=2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) La única solución del sistema para $k=-2$ es $s=(1;0;0)$.

c) El sistema no admite solución si $k=3$

d) Si $k=0$ el sistema es compatible determinado.

23) Si $s=(2;1;-1)$ es una solución particular del sistema $A.X=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar la solución general del sistema $A.X=B$.

24) Si $s=(1;2;-1)$ es una solución particular del sistema $A.X=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la solución general del sistema $A.X=B$.

25) Siendo $s_1=(1;2;3)$ y $s_2=(0;1;-1)$ soluciones particulares del sistema $A.X=B$:

a) Dar una solución particular del sistema homogéneo asociado.

b) Dar una solución particular del sistema $A.X=B$ distinta de las dadas.

26) Siendo $s_1=(3;0;2)$ y $s_2=(-1;5;-1)$ soluciones particulares del sistema $A.X=B$:

a) Dar una solución particular del sistema homogéneo asociado.

b) Dar una solución particular del sistema $A.X=B$ distinta de las dadas.

27) Los siguientes son los resultados del método de eliminación gaussiana. Interpretar su significado con respecto a su solución.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & 11 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

28) ¿Qué posibilidad de conjuntos solución, justificando la respuesta, existen para:

a) un sistema de ecuaciones no homogéneo de 5 x 3?

b) un sistema de ecuaciones no homogéneo de 4 x 8?

c) un sistema de ecuaciones no homogéneo de 18 x 18?

d) un sistema de ecuaciones no homogéneo de 80 x 60?

e) un sistema de ecuaciones no homogéneo de 350 x 150?

f) Analizar las mismas situaciones en el caso en que los sistemas sean homogéneos.

29) Dada la siguiente matriz de insumo producto, determinar la matriz de producción si la demanda final cambia a 600 para A y a 805 para B. Obtenga el valor total de los otros costos de producción que ello implica.

Industrias

	A	B	DF	PT
Industrias **A**	200	500	500	1200
Industrias **B**	400	200	900	1500
VA	600	800	1400	----
PT	1200	1500	----	2700

30) Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un determinado año:

	A	B	DF	PT
A	80	88	32	200
B	80	0	30	110
VA	40	22	62	----
PT	200	110	----	310

a) Construir la del año “t” en que el vector de demanda final es $D.F. = \begin{pmatrix} 42 \\ 28 \end{pmatrix}$

b) Indicar en qué paso de la resolución del problema se asume que la adquisición de productos de una industria es proporcional al nivel del producto final de la misma.

31) Una economía hipotética simple de tres industrias A, B y C está representada en la siguiente tabla (los datos están dados en millones de pesos):

	A	B	C	DF	PT
A	5	4	3	3	15
B	3	10	6	1	20
C	3	4	1	4	12

a) ¿Cuánto usa la industria B para sí de su propia producción?
b) ¿Cuál es el producto bruto final total de la economía?
c) ¿Cuál es la demanda final de la industria A?
d) ¿Cuál es la producción total de la industria C?
e) ¿Qué valor como insumo de la industria B usa la industria C?

32) Complete el siguiente cuadro de transacciones:

	A	B	DF	PT
A	14		8	28
B		18		36
VA	7			

a) Plantear la nueva tabla para una demanda final igual a $\begin{pmatrix} 30 \\ 35 \end{pmatrix}$

b) Plantear la nueva tabla para una demanda final igual a $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

33) Una economía hipotética simple de dos industrias A y B está representada en la siguiente tabla (los datos están dados en millones de pesos):

	A	B	DF	PT
A	150	240	210	600
B	200	120	160	480

Determine el valor del producto final para la economía si la demanda final cambia:

a) a 100 para A y a 200 para B
b) a 50 para A y a 60 para B
c) a 190 para A y a 380 para B. Realizar la tabla de insumo producto.

34) Sea $p=\frac{8}{100}q+50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante, y supóngase que la ecuación de demanda para su producto es $p=-\frac{7}{100}q+65$.

a) Hallar el punto de equilibrio de mercado para este producto.
b) Si se carga un impuesto de $1,50 por unidad al fabricante, ¿cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?
c) Determinar los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio tanto antes como después del impuesto.

35) Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son $3q-200p+1800=0$ y $3q+100p-1800=0$ respectivamente en donde "p" representa el precio por unidad y "q" representa el número de unidades.

a) Obtenga el precio de equilibrio. Grafique.
b) Determine el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor con un impuesto de 27 centavos por unidad.