ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 3

Transformaciones lineales

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 3

TRANSFORMACIONES LINEALES

1) Averiguar si las siguientes funciones son transformaciones lineales o no:
   a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y)=3.(x;y)$
   b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y)=(x+y;0;2x-y)$
   c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x;y)=x.y$
   d) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y;z)=(x+1;2y;x+y)$
   e) $f:\mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_{11}-a_{12} & a_{13}+2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   f) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y;z)=(x;x+y+z)$
   g) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y;z)=(2x+y;3y-4z)$
   h) $f:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \,/\, f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
   i) $f:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \,/\, f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}+a_{12}$
   j) $f:P_2 \to P_2 \,/\, f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0+(a_1+a_2)x+(2a_0-3a_1)x^2$
   k) $f:\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m} \,/\, f(A)=A^t$

2) Siendo $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:
   $f(1;0;0)=(1;1)$ $f(0;1;0)=(3;0)$ $f(0;0;1)=(4;-7)$
   a) Hallar $f(2;0;-1)$
   b) Calcular $f(x;y;z)$

3) ¿Puede existir una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(-1;0;-3)=(1;1)$ y $f(2;0;6)=(2;1)$? Justificar la respuesta.

4) Se definen transformaciones lineales y las imágenes de una base. Hallar las imágenes pedidas:
   a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(1;0)=(1;2;0)$; $f(0;1)=(0;3;1)$
      i) $f(x;y)$
      ii) $f(-3;11)$
   b) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(1;0;0;0)=(1;2;1)$; $f(0;1;0;0)=(0;1;0)$; $f(0;0;1;0)=(1;3;0)$; $f(0;0;0;1)=(1;1;1)$
      i) $f(x;y;z;w)$
      ii) $f(1;-2;0;3)$

5) Sea $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una transformación en dos espacios vectoriales de dimensión finita. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.
   a) Si f es lineal, entonces f conserva las sumas y productos por escalares.
   b) Si $f(x+y)=f(x)+f(y)$ entonces f es lineal
   c) f es inyectiva si y sólo si $Nu(f)=\{0\}$
   d) f es lineal entonces $f(0_{\mathbb{V}})=0_{\mathbb{W}}$
   e) $x_1\in\mathbb{V}, x_2\in\mathbb{V}\wedge y_1\in\mathbb{W}, y_2\in\mathbb{W}$, existe una T.L. $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ tal que $f(x_1)=y_1$; $f(x_2)=y_2$

6) Si $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ es una transformación lineal, demostrar que $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

7) De acuerdo a los datos, hallar la dimensión del núcleo de cada una de las transformaciones lineales siguientes:
   a) $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^7 \quad\wedge\quad \dim(Im(f))=3$
   b) La imagen de $f:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$
   c) $f:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2} \quad\wedge\quad \dim(Im(f))=3$

8) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, encontrar base del $Nu(f)$ e $Im(f)$. Calcular $\dim(Nu(f))$ y $\dim(Im(f))$. Determinar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y)=(x+y;0;2x-y)$
   b) $f:\mathbb{R}^{2\times3}\to\mathbb{R}^{2\times2} \,/\, f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_{11}-a_{12} & a_{13}+2a_{12} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$
   c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y;z)=(2x+y;3y-4z)$
   d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y;z)=(-x+3y+z;y+2z)$
   e) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y;z)=(x+y;z;2x+2y)$
   f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y;z)=(z;x+y;-y)$
   g) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y;z;w)=(x+y;y+w)$
   h) $f:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2} \,/\, f(A)=A.B$ siendo $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$
   i) $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ la transformación lineal nula.
   j) $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal identidad.

9) Sea $\mathbb{S}=\{u_1;u_2;\cdots;u_k\}$ un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{U}$ y sea $f:\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ una transformación lineal. Probar que $f(\mathbb{S})=\{f(u_1);f(u_2);\cdots;f(u_k)\}$ es linealmente dependiente.

10) Sea $\mathbb{S}=\{u_1;u_2;\cdots;u_k\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{U}$ y sea $f:\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ una transformación lineal. Probar que $f(\mathbb{S})=\{f(u_1);f(u_2);\cdots;f(u_k)\}$ es un sistema de generadores de $Im(f)$.

11) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $\{y_1;y_2;\cdots y_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de $Im(f)$. Si $\mathbb{S}=\{x_1;x_2;\cdots;x_k\}$ es tal que $f(x_i)=y_i$ para $i=1,2,\cdots,k$, demostrar que $\mathbb{S}$ es un conjunto linealmente independiente.

12) Si A es una matriz $m\times n$ y los elementos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ se consideran vectores columnas, entonces $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definida por $f(x)=A.x$ es una transformación lineal.

En efecto:

Si x e y son vectores columnas de $\mathbb{R}^n$, entonces la multiplicación por derecha de A por x e y está definida y resulta:

- $f(x+y)=A.(x+y)=A.x+A.y=f(x)+f(y)$
- $f(\alpha x)=A.(\alpha.x)=\alpha.(A.x)=\alpha.f(x)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

Una aplicación de esta transformación lineal:

Un fabricante produce tres artículos diferentes siendo necesario para su producción dos materias primas. Los tres artículos son A_1, A_2 y A_3 y las materias primas R_1 y R_2. En la tabla se indica el número de unidades que se necesitan de cada materia prima para fabricar una unidad de cada artículo:

	A_1	A_2	A_3
R_1	0	1	6
R_2	0,5	0	4

Si se fabrican ciertas cantidades de los tres artículos, ¿cuántas unidades de materias primas serán necesarias? Indicando con p_1, p_2 y p_3 las cantidades producidas de cada uno de los tres artículos, y con r_1 y r_2 las unidades necesarias de cada materia prima, entonces se define:

$$p=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\qquad r=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0&1&6\\0,5&0&4\end{pmatrix}$$

Conociendo que $p=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$, ¿cuántas unidades de R_1 y de R_2 se requieren para producir estas cantidades de unidades de los tres artículos?

La transformación lineal que al vector de producción p le hace corresponder el vector de materias primas r está dada por $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ donde $S(p)=r$

Es decir:

$A.p=r$ definida como la multiplicación ordinaria de matrices:

$$\begin{pmatrix}0&1&6\\0,5&0&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si en algún caso la cantidades de artículos producidas fuesen 10, 40 y 20 respectivamente, la cantidad de materia prima necesaria será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0,5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Se requieren 160 unidades de R_1 y 85 unidades de R_2.

De esta manera, $S(p) = A.p = r$ será la transformación lineal que indique las cantidades de materia prima necesarias, en función de las cantidades de artículos que se requieran producir.

13) Un fabricante de juguetes los produce utilizando como material, acero y plástico, y consta de tres partes: ruedas, ejes y carrocerías:

	J_1	J_2	J_3
Ruedas	4	3	2
Ejes	2	2	1
Carrocerías	1	1	1

	Ruedas	Ejes	Carrocerías
Acero	0	2	4
Plástico	0,8	0	1

Sea x_i con $i = 1, 2, 3$ el número de juguetes de clase i requerido en una orden de ventas para $i = 1, 2, 3$. Sea y_i igual al número de partes de tipo i que se requiere para armar los juguetes pedidos en una orden.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que relaciona el vector de orden de venta con el vector de las partes y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que relaciona el vector de las partes y_i con el vector de materiales.

a) Si una orden es $x = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$, encontrar $y = f(x)$

b) Calcular la cantidad de materiales que se necesitan para cumplir con la orden de ventas del punto (a).

14) Dados los siguientes datos:

	Juguetes		
	Uno	Dos	Tres
Parte1	6	8	4
Parte2	3	4	2
Parte3	1	2	1

	Partes		
	Uno	Dos	Tres
Material1	0	1	6
Material2	0,5	0	4

a) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ es el vector de orden de venta, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ es el vector de partes, y $T(X) = Y$,

Escribir $T(X)$ como producto de matrices.

b) Si $X = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$, encontrar $Y = T(X)$

c) Si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ es el vector de los materiales, y $F(Y) = Z$, escribir $F(Y)$ como producto de matrices.

d) Por medio de producto de matrices, encontrar la cantidad de materiales que se requiere para cumplir con la orden de venta de (b)

e) Por medio de producto de matrices, encontrar la transformación que de la cantidad de materiales que se requiere para cumplir con la orden de venta.

15) Hallar una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea generada por $y_1 = (1;2;3)$ y $y_2 = (4;5;6)$.

16) Hallar una transformación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo esté generado por $n_1 = (1;2;3;4)$ y $n_2 = (0;1;1;1)$.

17) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que: $f(1;0;0) = (1;1)$; $f(0;1;0) = (4;0)$; $f(0;0;1) = (-2;3)$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$

a) Hallar la matriz de la transformación lineal.

b) Hallar $f(6;-2;1)$

c) Hallar $f(x;y;z)$

18) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1;x_2) = (x_1 + 2x_2; -x_1; 0)$

a) Hallar la matriz de f respecto de las bases $B = \{u_1;u_2\}$ y $B' = \{v_1;v_2;v_3\}$ siendo

$u_1 = (2;-1)$; $u_2 = (1;0)$; $v_1 = (1;0;1)$; $v_2 = (2;2;0)$; $v_3 = (1;0;0)$

b) Utilizando la matriz obtenida en el punto anterior, calcular $f(10;4)$

19) Para las siguientes transformaciones lineales, hallar la matriz correspondiente respecto a las bases B y B' indicadas en cada caso:

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x_1;x_2;x_3) = x_1 + 3x_2 - x_3$

$B = \{(1;1;1);(1;-1;1);(0;1;1)\}$ $\qquad B' = \{1\}$

b) $f:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(A) = (a_{11} - a_{22} + a_{21}; a_{11} - a_{12}; 3a_{12})$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad B' = \{(1;1;0);(-1;0;0);(0;0;-1)\}$

c) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la T.L nula; B y B' bases cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$

d) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la T.L identidad; $B = B'$ base cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

20) La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ define una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas de cada espacio.

a) Hallar $f\left(-1;1;2\right)$

b) Hallar $Nu\left(f\right)$; base de $Nu\left(f\right)$ e $Im\left(f\right)$ y dimensión de $Nu\left(f\right)$ y de $Im\left(f\right)$.

21) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \,/\, f\left(x_1;x_2\right)=\left(x_1-2x_2;2x_1+3x_2;x_1+x_2\right)$. Definir una transformación lineal $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $g\circ f=Id_{\mathbb{R}^2}$.

22) Dada $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \,/\, f\left(x;y\right)=\left(x;x+y;y\right)$ considerando la base $B=\left\{\left(1;1\right);\left(0;-1\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y la función $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \,/\, g\left(x;y;z\right)=\left(x+y;z\right)$ considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $B=\left\{\left(1;1\right);\left(0;-1\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Hallar la matriz $M_{BB}\left(g\circ f\right)$ y la matriz $M\left(f\circ g\right)$ y verificar que $M_{BB}\left(g\circ f\right)=M_{EB}\left(g\right).M_{BE}\left(f\right)$ y que $M\left(f\circ g\right)=M_{BE}\left(f\right).M_{EB}\left(g\right)$

23) Sea $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la transformación lineal $g\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)=\left(x_1-2x_4;2x_1-4x_4;x_2+x_3+x_4;x_3\right)$ y sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por la matriz $M\left(f\right)=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ respecto a las bases canónicas en cada espacio.

a) Hallar una base del $Nu\left(f\circ g\right)$

b) Calcular $Im\left(f\circ g\right)$