ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 2

Estructuras Algebraicas. Espacios Vectoriales

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 2

Primera Parte: *ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS*

1) Indique entre las operaciones habituales definidas en $\mathbb{R}$:
   a) Una ley interna asociativa
   b) Una ley interna no asociativa
   c) Una ley interna conmutativa
   d) Una ley interna no conmutativa
   e) Una ley interna distributiva con respecto a la suma y a la resta.
   f) Una ley interna no distributiva con respecto a la suma y a la resta.
   g) Una operación que no sea ley interna.

2) Dado $A=\{m,p,r\}$ y las operaciones $*$; $\circ$ y $\square$ definidas en él:

$*$	m	p	r
m	m	m	m
p	m	p	r
r	m	r	p

$\circ$	m	p	r
m	m	p	r
p	p	r	m
r	r	m	p

$\square$	m	p	r
m	m	m	m
p	m	p	r
r	r	r	m

   a) Verificar que cada una de ellas define una les de composición interna en A.
   b) Hallar el resultado de:
      i) $(m*m)*r$
      ii) $(m*r)\square p$
      iii) $(p\square r)*(p\circ r)$
      iv) $(m\square m)\circ r$
      v) $[(m*p)\circ r]\square p$
   c) Indicar cuál es el elemento neutro para cada ley interna definida.
   d) Hallar el inverso de cada elemento de A (si existen) respecto de $*$.
   e) Determinar cuáles de las leyes internas dadas son conmutativas. Justificar.

3) Para cada una de las siguientes operaciones, verificar que son leyes de composición interna en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ y analizar: asociatividad, conmutatividad, existencia de elemento neutro y de elemento simétrico:
   a) $a\circ b=a+b+ab$
   b) $a*b=a+b+1$
   c) $a\vartriangle b=3(a+b)$

4) Determinar en cada caso si $(A;*)$ tiene estructura de grupo si:
   a) $A=\{1;0;-1\}$ $\quad a*b=a.b$
   b) $A=\{1;2;4;8\}$ $\quad a*b=mcm(a;b)$
   c) $A=\{x\,/\,x=2^m \wedge m\in\mathbb{Z}\}$ $\quad *$: producto usual
   d) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,|x|\le 3\}$ $\quad *$: adición habitual

5) Analizar si constituyen o no grupo abeliano, justificando:
a) $(\mathbb{N};+)$; b) $(\mathbb{Z};+)$; c) $(\mathbb{Q};.)$; d) $(\mathbb{R};+)$; e) $(\mathbb{R};.)$

6) Demostrar que $(\mathbb{Q}-\{0\};.)$ y $(\mathbb{R}-\{0\};.)$ tienen estructura de grupo abeliano.

7) Determinar en cada caso si el par $(G;*)$ es grupo:
a) $G=\{x/x=2k+1 \wedge k\in\mathbb{Z}\}$ $*$ es el producto ordinario
b) $G=\{x/x=3k \wedge k\in\mathbb{Z}\}$ $*$ es la adición en $\mathbb{Z}$

8) a) Sea $P(x)$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales en la variable x, de grado igual a 3 y el polinomio nulo. Analizar si $P(x)$ con la operación adición de polinomios, es grupo.
b) Analizar si $P(x)$, conjunto de polinomios con coeficientes reales en la variable x, de grado menor o igual a 4, y el polinomio nulo, con la adición de polinomios, es grupo.

9) a) En $\mathbb{Q}$ resolver la ecuación $x+\frac{1}{2}=3$. ¿Cuántas soluciones tiene?
b) Sea $(G;*)$ grupo. Si $a\in G \wedge b\in G$, demostrar que las ecuaciones $a*x=b$ y $x*a=b$ tienen única solución.

10) Sea $(G;*)$ grupo, demostrar:
a) $\forall a\in G:\ (a^{-1})^{-1}=a$
b) $\forall a\in G,\ \forall b\in G:\ (a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

11) Probar que $(\mathbb{R}^2;+)$ es un grupo abeliano, siendo $+:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 / (a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$

12) Usando los resultados obtenidos en el ejercicio 3:
a) Analizar para cada uno de los siguientes pares, si es o no grupo:
i) $(\mathbb{Z};*)$
ii) $(\mathbb{Z};\circ)$
iii) $(\mathbb{Q};*)$
iv) $(\mathbb{Q};\circ)$
b) Investigar si es o no cuerpo: $(\mathbb{Q};*;\circ)$

13) Averiguar, justificando en cada caso, si las siguientes ternas tienen estructura de cuerpo:
a) $(\mathbb{Z};+;\cdot)$
b) $(\mathbb{Q};+;\cdot)$
c) $(\mathbb{R};+;\cdot)$
Siendo $+$ y $\cdot$ la suma y el producto habituales.

14) Sea $(\mathrm{K};+;\cdot)$ un cuerpo, $a\in\mathrm{K}$, $b\in\mathrm{K}$. Demostrar: "Si $b\neq 0$ entonces la ecuación $b\cdot x=a$ admite solución única en K"

Segunda Parte: ***ESPACIOS VECTORIALES***

1) Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$: $u=(3;2)$ y $v=(1;2)$
   a) Representarlos gráficamente.
   b) Hallar $u+v$ siendo "$+$" la suma usual, tal que $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$.
   c) Hallar $3.u+2.v$ siendo "$\cdot$" la multiplicación por un escalar usual, tal que $\lambda(a;b)=(\lambda.a;\lambda.b)$
   d) Representar gráficamente los vectores obtenidos en b) y c).

2) Escribir en forma explícita:
   a) El neutro para la suma en $\mathbb{R}^3$.
   b) El inverso aditivo de $(1;2;-3;5)\in\mathbb{R}^4$.
   c) El inverso aditivo del inverso aditivo de un vector $v\in\mathbb{R}^n$.
   d) El inverso aditivo del neutro para la suma en $\mathbb{R}^n$.
   e) El vector $(1;1;1)+(3;2;2)$ en $\mathbb{R}^3$.
   f) La propiedad conmutativa para la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$.
   g) La suma del inverso aditivo de $(1;1)$ con 5 veces el vector $(4;5)$ en $\mathbb{R}^2$.
   h) El vector $3.(1;1;8)+4\left[(-2;3;0)+5.(1;0;1)\right]$
   i) El vector de $\mathbb{R}^3$ que sumado al inverso aditivo del vector $(1;-4;6)$ da por resultado el vector $3.(3;4;2)$.

3) Verificar que $(\mathbb{R}^3;+)$ es un grupo conmutativo. Generalizar para $(\mathbb{R}^n;+)$ siendo "$+$" la suma usual.

4) El producto escalar de vectores de $\mathbb{R}^n$ es la función:
   $\bullet:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,/\,\vec{x}\bullet\vec{y}=x_1.y_1+x_2.y_2+\cdots+x_n.y_n$, en donde $\vec{x}=(x_1;x_2;\cdots;x_n)$; $\vec{y}=(y_1;y_2;\cdots;y_n)$
   Calcular:
   a) $(2;3)\bullet(1;2)$ en $\mathbb{R}^2$, representar gráficamente los vectores.
   b) $(-2;3)\bullet(3;2)$ en $\mathbb{R}^2$, representar gráficamente los vectores.
   c) $(1;2;5)\bullet(-1;3;0)$ en $\mathbb{R}^3$.
   d) $(1;0;4;5)\bullet(0;2;0;0)$ en $\mathbb{R}^4$.
   e) $(19;32;7)\bullet(0;0;0)$ en $\mathbb{R}^3$.

5) Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Indicar verdadero o falso, justificando:
   a) $u\bullet v=v\bullet u$
   b) $u=\vec{0}$ o $v=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $u\bullet v=0$
   c) $u\bullet v=0$ $\Rightarrow$ $u=\vec{0}$ o $v=\vec{0}$

6) Dados los vectores $(1;3)$ y $(-3;1)$ de $\mathbb{R}^2$
   a) Representarlos gráficamente. ¿Qué ángulo forman entre ellos?
   b) Verificar que su producto escalar es igual a 0. ¿Cómo se llaman estos vectores?

c) Hallar un vector $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $(x;y)\bullet(1;2)=0$ y representar gráficamente. ¿Es única la solución?

7) Dados el vector $x=(x_1;x_2;\cdots;x_n)$ donde x_i es la cantidad del bien i que el consumidor puede adquirir con un nivel de ingreso $I>0$ y el vector de precios $p=(p_1;p_2;\cdots;p_n)$.
Escribir:
a) La relación a la cual está sujeto el lote de bienes que puede adquirir.
b) La relación a la cual está sujeto el lote de bienes que puede adquirir si el consumidor gasta todo su ingreso.

8) Un consumidor tiene un ingreso de \$800 y lo destina a la compra de dos bienes A y B, cuyos precios unitarios son respectivamente $p_1=160$ y $p_2=80$.
a) Escribir el vector de precios y representarlo gráficamente.
b) Escribir la ecuación presupuestaria y graficar la recta de posibilidades de consumo. ¿Cómo es la posición del vector de precios y la recta de posibilidades de consumo?
c) ¿Cuál es la cantidad máxima de bienes B que el consumidor puede adquirir con su ingreso, sin adquirir ningún bien A?

9) El plano balance que contiene todos los presupuestos que tiene un gasto de \$3000 para la adquisición de tres bienes, escrito en forma segmentaria, es $\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{10}=1$.
a) Representarlo.
b) Escribir la ecuación presupuestaria.
c) Hallar el vector de precios.
d) ¿Cómo es la posición del vector de precios respecto del plano balance?

10) Un consumidor tiene un ingreso de \$1800 y lo destina a la compra de tres bienes. La ecuación del plano balance es: $\frac{x}{30}+\frac{y}{60}+\frac{z}{90}=1$
a) Hallar la ecuación presupuestaria.
b) Dar el vector de precios.
c) ¿Qué significa el valor $y=60$?

11) Sabiendo que:
a) El vector de precios es un múltiplo escalar del vector $(6;8;7)$.
b) Una de las posibilidades de consumo es $(x_1;x_2;x_3)=(40;50;30)$
c) El ingreso es igual a \$10.200
Hallar:
i) El vector de precios.
ii) La ecuación presupuestaria.

12) a) Demostrar que $(\mathbb{S};+;\mathbb{R};\cdot)$ es un subespacio vectorial con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^2$ en el ejercicio 1 siendo $\mathbb{S}=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x\}$
b) Completar y tachar lo que no corresponde:
"Observar que el conjunto está representado por la recta ……………, que SI/NO pasa por el origen."

13) a) Investigar si $(\mathbb{V};+;\mathbb{R};\cdot)$ es un subespacio vectorial con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^2$ siendo $\mathbb{V}=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$

b) Completar y tachar lo que no corresponde:

"Observar que el conjunto está representado por la recta ……………, que SI/NO pasa por el origen."

14) a) Investigar si $(\mathbb{W};+;\mathbb{R};\cdot)$ es un subespacio vectorial con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^2$ siendo $\mathbb{W}=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=mx+b \wedge b\neq 0\}$

b) Completar y tachar lo que no corresponde:

"Observar que el conjunto está representado por la recta ……………, que SI/NO pasa por el origen."

15) Sea $(\mathbb{V};+;\mathbb{R};\cdot)$ un espacio vectorial, probar que:

a) $\forall\, v,w,z\in\mathbb{V}: v+w=v+z \quad \Leftrightarrow \quad w=z$

b) $\forall\, v\in\mathbb{V}: 0.v=\vec{0}$

c) $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}: \alpha.\vec{0}=\vec{0}$

d) $\alpha.v=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha=0 \quad \vee \quad v=\vec{0}$

e) $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}\wedge\forall\, v\in\mathbb{V}: (-\alpha).v=-(\alpha.v)$

f) $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}\wedge\forall\, v\in\mathbb{V}: \alpha.(-v)=-(\alpha.v)$

16) Determinar si el conjunto dado es o no espacio vectorial. Si no lo es, enunciar los axiomas que no se cumplen:

a) El conjunto de las matrices cuadradas de orden n con las operaciones usuales de adición de matrices y de multiplicación por un escalar.

b) $(N;+;\mathbb{R};\cdot) / N=\{(0;0;0)\}$, siendo $+$ y $\cdot$ las leyes usuales de $\mathbb{R}^3$.

c) $(\mathbb{S};+;\mathbb{R};\cdot) / \mathbb{S}=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1=x_2=x_3\}$, siendo $+$ y $\cdot$ las leyes usuales de $\mathbb{R}^3$.

17) Demostrar que todo subespacio no vacío de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ contiene al vector nulo.

18) Indicar si cada uno de los siguientes conjuntos es subespacio del espacio correspondiente. Justificar la respuesta.

a) $\mathbb{H}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / z=3x+y\}$

b) $\mathbb{H}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x+y-3=2z\}$

c) $\mathbb{H}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x=3y\wedge z=-y\}$

d) $\mathbb{H}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / y=3\}$

e) $\mathbb{H}=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2<0\}$

19) Sea $\mathbb{V}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con las operaciones usuales de adición de matrices y multiplicación por un escalar. Determinar si el subconjunto $\mathbb{H}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Justificar la respuesta.

a) $\mathbb{H}$: Conjunto de matrices diagonales.

b) $\mathbb{H}$: Conjunto de matrices regulares o no singulares.

c) $\mathbb{H}$: Conjunto de matrices simétricas.

d) $\mathbb{H}$: Conjunto de matrices antisimétricas.

20) Comprobar que el conjunto solución del sistema:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ no es subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$

d) Hallar el subespacio de matrices conmutables con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

21) a) Probar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$:

$$\begin{cases} x \quad - z = 2 \\ 6x - 7y + z = -2 \\ x + 4y - 5z = 10 \end{cases}$$

b) Dar una base y su dimensión.

c) Si el vector $v = (3;3;3)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

22) a) Probar que el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones es un subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$.

b) Dar una base y su dimensión.

i) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x \quad + 2z = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x - 5y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$

c) Si el vector $v = (-4;5;2)$ pertenece al subespacio de (i), expresarlo en dicha base.

d) Si el vector $w = (9;5;2)$ pertenece al subespacio de (ii), expresarlo en dicha base.

23) Sean $v_1 = (1;-3;2)$ y $v_2 = (2;-1;1)$ pertenecientes a $\mathbb{R}^3$.

a) Escribir, si es posible, a $\vec{t} = (4;3;-1)$ como combinación lineal de v_1 y v_2.

b) ¿es posible expresar $\vec{u} = (2;1;-3)$ como combinación lineal de v_1 y v_2?

c) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es $\vec{w} = (1;12;k)$ una combinación lineal de v_1 y v_2?

d) Indicar qué condición deben cumplir los números reales a, b y c para que el vector $\vec{v} = (a;b;c)$ sea una combinación lineal de v_1 y v_2.

e) Hallar el subespacio generado por $\{v_1;v_2\}$.

24) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $v = (k;1;1)$ resulte combinación lineal de $u = (0;2;1)$ y $w = (1;-1;0)$

25) Un consumidor tiene un ingreso I = \$2.000 y lo destina a la compra de dos bienes cuyo vector de precios es $(p_1;p_2)=(100;200)$.

a) Hallar y representar la línea de posibilidades de consumo y obtener el vector posición de cualquiera de sus puntos como combinación lineal convexa de los vectores $\left(\frac{I}{p_1};0\right)$ y $\left(0;\frac{I}{p_2}\right)$.

b) Hallar el vector para el cual la cantidad del segundo bien es igual al doble de la cantidad del primer bien.

c) Si en la combinación convexa es $\lambda=\frac{3}{10}$, hallar el vector de cantidades.

26) Determinar si el conjunto dado de vectores es L.D o L.I.:

a) En $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};\cdot)$, $D=\{(3;1;1);(2;-1;5);(4;0;-3)\}$

b) En $(\mathbb{R}^{2\times 2};+;\mathbb{R};\cdot)$, $F=\left\{\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}$

c) En $(\mathbb{R}^{2\times 3};+;\mathbb{R};\cdot)$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

d) En $P_2(x)$, $C=\{1;2x;3x^2;2x+x^2\}$

27) Determine la o las condiciones que deben satisfacer los números a,b,c y d a fin de que los vectores $(a;b)$ y $(c;d)$ sean L.I.

28) Se sabe que $\{u;v\}$ y $\{v;w\}$ son conjuntos de vectores linealmente dependientes de $\mathbb{R}^n$. Determinar si el conjunto $\{u;w\}$ es linealmente dependiente.

29) Se sabe que $\{u;v\}$ y $\{v;w\}$ son conjuntos de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Determinar si el conjunto $\{u;w\}$ es linealmente independiente.

30) Se sabe que $\{u;v;w\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes de $\mathbb{R}^n$. Proporcionar un ejemplo para mostrar que u no es necesariamente una combinación lineal de v y w.

31) Demostrar que si el conjunto de vectores $\{u;v\}$ de un espacio vectorial $(\mathbb{V};+;\mathbb{R};.)$ es linealmente independiente, entonces también lo es el conjunto $\{u;u+v\}$.

32) Demostrar que dos vectores del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};.)$ son linealmente dependientes sí y sólo si uno de ellos es un múltiplo del otro. Generalizar para $\mathbb{R}^n$.

33) Usar el resultado del ejercicio anterior para decidir (a simple vista) si los siguientes pares de vectores son L.I. O L.D.

a) $(1;1);(2;7)$

b) $(2;4;1);(8;16;4)$

c) $(5;5;10;0;5);(1;1;2;0;1)$
d) $(0;0;0);(-5;7;18)$

34) Analizar si el vector $g=(2;14;-34;7)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1=(1;4;-5;2)$ y $v_2=(1;2;3;1)$

35) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio generado por los vectores $v_1=(1;3;5)$ y $v_2=(-1;0;2)$. Dar un ejemplo de un vector que pertenezca a dicho subespacio y uno de un vector que no pertenezca al mismo.

36) Determinar si el conjunto de vectores dado genera, en cada caso, el espacio vectorial indicado. En caso negativo, hallar el subespacio generado.

a) En $\mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$
b) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1;-1;0);(0;2;1);(2;4;3)\}$
c) En $\mathbb{R}^4$, $\{(1;0;0;0);(0;1;0;0);(0;0;1;0);(0;0;0;1)\}$
d) En $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}\right\}$

37) Verificar que todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $v_1=(1;3)$; $v_2=(3;7)$ y $v_3=(-3;5)$. ¿Significa esto que el conjunto $\{v_1;v_2;v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$? Justificar la respuesta.

38) a) Verificar que el conjunto $B=\{(1;1;1);(1;1;0);(1;0;0)\}$ es una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};.)$. Expresar el vector $(a;b;c)$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

b) Las coordenadas de un vector $\vec{u}$ en la base $B_1=\{(1;2);(3;5)\}$ son 2 y -1. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $B_2=\{(-1;1);(4;-3)\}$?

c) Las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base $B_1=\{(1;1;1);(1;1;0);(1;0;0)\}$ son 1; 8 y 5. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B_2=\{(1;-1;0);(0;1;-2);(0;1;-3)\}$?

39) Determinar si el conjunto dado de vectores es una base del espacio vectorial indicado. En caso de no serlo, hallar el subespacio generado, una base y su dimensión:

a) En $\mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$
b) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1;2;-1);(1;0;2);(2;1;1)\}$
c) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1;0;2);(3;-1;4)\}$
d) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1;1;1);(3;0;1);(-1;2;3);(0;4;5)\}$
e) En $\mathbb{R}^4$, $\{(1;0;0;0);(0;1;0;0);(0;0;1;0);(0;0;0;1)\}$ ¿Cómo se llama este conjunto?
f) En $P_2(x)$, $\{1-3x+2x^2;1+x+4x^2;1-7x\}$
g) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1;0;0);(2;2;0);(3;3;3)\}$

40) ¿Qué valores del número $k \in \mathbb{R}$ hacen que el conjunto de vectores $\{(1;0;k);(k;1;0);(k+1;1;k)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$?

41) Hallar una base y la dimensión del espacio solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + \quad 4x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y + 3z - w = 0 \\ 2x - 8y + 6z - 2w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$

42) Determinar el subespacio de $(\mathbb{R}^3;+;\mathbb{R};.)$ generado por el conjunto de vectores indicado en cada caso y obtener una base de dicho subespacio y la dimensión.

a) $\{(1;-3;1);(1;-1;0);(3;-9;3)\}$

b) $\{(1;1;-1);(2;3;-1);(3;1;-5)\}$

c) $\{(1;-1;-3);(3;-2;-8);(2;1;-3)\}$

d) Verificar que los subespacios generados en b) y c) son iguales.