ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 5

Programación lineal y Simplex

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 5

PROGRAMACIÓN LINEAL Y SIMPLEX

1) Indica el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Reemplazar cada proposición falsa por una verdadera. Con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.
   a) $x > y \quad \Rightarrow \quad -x < -y$
   b) Si $y - 2x \geq -1$ entonces $2x - y \leq -1$
   c) Si $y - 3x \leq 2$ entonces $3x - y > 2$
   d) Si $y > a$ y $x > b$ entonces $y - x > a - b$
   e) Si $y < b$ y $x < a$ entonces $y - x > a - b$
   f) $4x - 2y > 6$ es equivalente a $-2x + y > -3$

2) Halla gráficamente, en cada caso, el conjunto solución:
   a) En $\mathbb{R}$: $-2x + 3 \geq 7$
   b) En $\mathbb{R}$: $5 \leq -2x - 3$
   c) En $\mathbb{R}^2$: $y > 6 - 2x$
   d) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$
   e) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 2x + y \geq 5 \\ 3x + 2y \leq 20 \end{cases}$
   f) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x + y > -6 \\ 2x - 3y > -12 \\ y > x \end{cases}$
   g) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x + y > -6 \\ x + y > -5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3) Expresar en forma simbólica y graficar:
   a) La producción de un artículo A debe superar las 100 unidades.
   b) La producción del artículo A debe ser por lo menos igual a la producción del artículo B.
   c) El ingreso total por la venta del producto A que se vende a \$10 la unidad debe ser superior a \$1000.
   d) El ingreso total por la venta del producto A que se vende a \$10 la unidad y del producto B que se vende a \$20 la unidad, debe ser superior a \$1000.

4) Hallar la solución aplicando el método gráfico:
   a) Minimizar: $Z = x + 2y$
      Sujeta a: $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$
      Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$
   b) Maximizar: $Z = 2x + 3y$
      Sujeta a: $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$
      Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$
   c) Minimizar: $Z = 7x + 3y$
      Sujeta a: $\begin{cases} 3x - y \geq -2 \\ x + y \leq 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$
      Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$
   d) Minimizar: $Z = 200x + 100y$
      Sujeta a: $\begin{cases} 300x + 100y \geq 30000 \\ 4x + 8y \geq 800 \end{cases}$
      Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$
   e) Maximizar: $Z = 3x + 6y$
      Sujeta a: $\begin{cases} x + y \geq -3 \\ 2x - y \leq 4 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$
      Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

f) Maximizar: $Z = 2x - 4y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 3x - y \geq -2 \\ x - 4y \leq 0 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

5) Indicar una posible función objetivo, cuyas variables están sujetas a las siguientes condiciones:

$\begin{cases} 4x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 12 \end{cases}$ Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

De tal modo que:

a) La solución óptima que maximiza la función objetivo propuesta se encuentre en alguno de los vértices del polígono.

b) Existan soluciones óptimas sobre algún lado del polígono.

6) Utilizando el método simplex, resolver:

a) Maximizar: $Z = x + 2y$

Sujeta a: $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

b) Maximizar: $Z = x + 1{,}5y$

Sujeta a: $\begin{cases} 2x + 2y \leq 160 \\ x + 2y \leq 120 \\ 4x + 2y \leq 280 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

c) Maximizar: $Z = 3x - 3y$

Sujeta a: $\begin{cases} x - y \leq 4 \\ -x + y \leq 4 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

d) Maximizar: $Z = 2x + 4y + 3z$

Sujeta a: $\begin{cases} x + 2y + 3z \leq 7 \\ x + y + z \leq 4 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0$

7) Minimizar, utilizando el método simplex:

a) $Z = 1{,}5x + y + 2{,}5z$

Sujeta a: $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}3z \geq 0{,}3 \\ 0{,}5x + 0{,}6y + 0{,}4z \geq 0{,}6 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0$

b) $Z = 15x + 10y + 25z$

Sujeta a: $\begin{cases} 5x + 6y + 4z \geq 6 \\ 2x + y + 3z \geq 3 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0$

8) Una fábrica produce dos tipos de juguetes, A y B. Como hay un número limitado de instalaciones y empleados, esta planta, trabajando a plena capacidad, tiene como máximo 950 horas-hombre disponibles a la semana en su departamento de maquinado, 1000 horas-hombre disponibles a la semana en su departamento de ensamble y 250 horas-hombre en su departamento de pintura. La producción de un juguete de cada uno de los dos tipos requiere las siguientes horas-hombre en cada uno de sus tres departamentos:

	Maquinado	***Ensamble***	***Pintura***
A	0,2	0,2	0,1
B	0,5	0,1	0,1

La producción de un juguete del tipo A se vende a \$10 y la del tipo B, a \$8. ¿Qué cantidad de cada tipo de juguete conviene fabricar para maximizar el beneficio?

9) Para preparar una dieta óptima se dispone de dos ingredientes $(I_1;I_2)$. El análisis químico determinó que contiene tres tipos distintos de nutrientes por cada kilo, a saber: 4, 7 y 1,5 gramos para I_1; 8, 2 y 5 gramos para I_2. La empresa consigue en el mercado I_1 a \$30 el kg. y el I_2 a \$40 el kg. Asimismo se determinó el contenido mínimo de nutrientes para que la dieta sea eficaz: 32, 14 y 15 gramos, respectivamente.

Se pide:
a) Programa óptimo
b) Si la empresa se ve obligada a incorporar un nuevo nutriente, con 1,5 gramos para I_1 y 5 gramos para I_2 y un requerimiento mínimo de 18 gramos, determinar qué efecto produce en términos de solución óptima.

10) Para la fabricación de dos productos se utilizan tres insumos según los valores consignados en la siguiente matriz:

Insumo \ Producto	P_1	P_2	Disponibilidad
I_1	**5**	**10**	**80**
I_2	**40**	**20**	**360**
I_3	**10**	**10**	**100**
Beneficio	**2**	**3**	**---**

En base a esta información se pide:

a) ¿Cuánto debe fabricarse de cada producto para utilizar la totalidad de los insumos 2 y 3?
b) ¿Cuál es la cantidad máxima que puede producirse del producto 1?
c) Determinar el programa óptimo de producción.
d) ¿Las disponibilidades de qué recursos podrían disminuirse sin modificar el beneficio máximo? ¿En cuánto y porqué?
e) ¿Cuáles son los recursos saturados?¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por una unidad más de ellos? ¿Por qué?
f) ¿Podría utilizarse el total de las disponibilidades de los tres insumos? ¿Por qué?
g) Si el precio de ambos productos varía en igual proporción, ¿se modifica la solución óptima? ¿Cómo y por qué?

11) Resolver los siguientes problemas utilizando el dual asociado.

a) Minimizar: $Z = 4x + 5y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + y \geq 7 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

b) Minimizar: $Z = 4x + 3y + 2z$

Sujeta a: $\begin{cases} x + 3y + 2z \geq 10 \\ 2x + y + 2z \geq 8 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0$

c) Minimizar: $Z = 5x + 8y + 4z$

Sujeta a: $\begin{cases} x + 3y + 2z \geq 3 \\ 2x + 4y + z \geq 2 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

d) Minimizar: $Z = 15x + 20y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ 3x + y \geq 6 \\ x + 4y \geq 8 \end{cases}$

Con $x \geq 0; \quad y \geq 0$

12) Para el estudio de un plan de producción se dispone de los siguientes datos:

	PRODUCTO A	PRODUCTO B	DISPONIBILIDADES
MAT. PRIMA	1	1	200 unidades
MANO DE OBRA	2	1	260 hs. Hombre
FONDOS	1000	2000	350.000 dólares
GANANCIA NETA	100	400	---

En base a esta información se pide:

a) Definir el significado concreto de todos los elementos del vector "Producto A".
b) Demostrar que no existe nivel de producción para el cual se utilicen todas las disponibilidades.
c) Considerar las disponibilidades del recurso 2 como "k" y averiguar para qué valores de k el sistema de ecuaciones lineales planteado tendría solución.
d) Plantear el modelo matemático que describa todas las alternativas posibles de producción.
e) Resolver gráficamente.
f) Resolver aplicando simplex.
g) ¿Cuál debería ser la ganancia neta, "C_2", del producto B, para que convenga fabricar el producto B exclusivamente?
h) ¿A qué costo incorporaría unidades adicionales de cada uno de los recursos?

13) Suponga un problema de asignación de recursos (materia prima, mano de obra, equipos) a líneas de producción (productos A y B). En base a los datos de la tabla adjunta, se pide:

a) Contribución marginal de los recursos y costo de oportunidad de los productos.
b) Análisis de sensibilidad de la solución ante variaciones en el precio de la venta del producto A.
c) Analizar la conveniencia de incorporar una nueva línea de producto que utilizaría una unidad de cada recurso y dejaría $25 la unidad.

$F = 100x_1 + 20x_2$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**B**
1	2	1	0	0	12
4	2	0	1	0	24
1	1	0	0	1	10

14) Considerar el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar: $Z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$

$$\text{Sujeta a:} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 & (\textit{recurso } A) \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12 & (\textit{recurso } B) \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 & (\textit{recurso } C) \end{cases}$$

Con $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$

a) Si se cambiara a 8 la cantidad del recurso A, ¿qué efecto tendría esto sobre las utilidades? ¿En qué forma se modificaría la solución óptima?
b) ¿Cuánto puede cambiarse el recurso B?
c) Cuál es el valor de una unidad adicional del recurso C?
d) ¿Cuánto tendría que aumentar la utilidad de x_3 para que pudiera incluirse en la solución óptima?