ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 4

Diagonalización de matrices

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 4

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1;x_2)=(x_1+2x_2;-x_1;0)$
   a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
   b) Hallar la matriz de f respecto de las bases $B=\{u_1;u_2\}$ y $B'=\{v_1;v_2;v_3\}$ siendo $u_1=(2;-1)$; $u_2=(1;0)$; $v_1=(1;0;1)$; $v_2=(2;2;0)$; $v_3=(1;0;0)$
   c) Mostrar que $M(f)$ y $M_{BB'}(f)$ son equivalentes.

2) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x;y)=(3x-2y;x)$
   a) Hallar $M(f)$
   b) Hallar $M_{BB}(f)$ siendo $B=\{(2;1);(1;1)\}$
   c) Mostrar que $M(f)$ y $M_{BB}(f)$ son semejantes. ¿Qué tipo de matriz es $M_{BB}(f)$?

3) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x;y;z)=(4x-y+6z;2x+y+6z;2x-y+8z)$
   a) Hallar $M(f)$
   b) Hallar $M_{BB}(f)$ siendo $B=\{(1;2;0);(-3;0;1);(1;1;1)\}$
   c) Mostrar que $M(f)$ y $M_{BB}(f)$ son semejantes. ¿Qué tipo de matriz es $M_{BB}(f)$?

4) Demostrar que si dos matrices son semejantes, tienen el mismo determinante.

5) Demostrar que si dos matrices son semejantes, también son semejantes sus potencias $n-ésimas$, a través de la misma matriz de cambio

6) ¿Es $\lambda=2$ un autovalor de $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$? Si lo es, hallar el autovector correspondiente

7) ¿Es $\lambda=5$ un autovalor de $\begin{pmatrix}6 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 5\\ 2 & 2 & 6\end{pmatrix}$? Si lo es, hallar el autovector correspondiente

8) ¿Es $(1;-2;1)$ autovector de $\begin{pmatrix}3 & 6 & 7\\ 3 & 3 & 7\\ 5 & 6 & 5\end{pmatrix}$? Si lo es, hallar el autovalor correspondiente.

9) ¿Es $(4;-3;1)$ autovector de $\begin{pmatrix}3 & 7 & 9\\ -4 & -5 & 1\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$? Si lo es, hallar el autovalor correspondiente.

10) Para cada una de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 7 & 4 & 2\\ -6 & 0 & -2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 9\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

   a) Hallar el polinomio característico
   b) Encontrar los autovalores.

c) Encontrar los autovectores.

11) Demostrar que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y su traspuesta tienen el mismo polinomio característico.

12) Demostrar que si A es inversible, entonces todos sus autovalores son no nulos.

13) Demostrar que si λ es autovalor de una matriz A no singular, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

14) Dadas las matrices A, B, C y G del ejercicio 10, diagonalizarlas.

15) Diagonalizar, si es posible, las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

16) Sea $A=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ -2 & 7\end{pmatrix}$ y sea $B=\{(3;1);(2;1)\}$ una base de autovectores de A. Utilizar esta información para:

a) Diagonalizar A.

b) Hallar A^5.

c) Hallar A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

17) Dadas las siguientes matrices, verificar el teorema de Cayley - Hamilton:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 12 & 10\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0 & 7 & 6\\ -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

18) Hallar, aplicando el teorema de Cayley – Hamilton, las inversas de las matrices del ejercicio anterior.

19) Verificar el teorema sobre matrices simétricas reales en las siguientes matrices y diagonalizar mediante una transformación ortogonal:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

20) Diagonalizar las siguientes matrices mediante una transformación ortogonal:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

21) .Diagonalizar las siguientes matrices simétricas con autovalores múltiples mediante una matriz ortogonal:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$