ÁLGEBRA – APUNTE TEÓRICO - UNIDAD TEMÁTICA Nº 1

Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 1

MATRICES

Ejemplo introductorio:

Una empresa productora de tecnología de punta vende su producción a varias cadenas conocidas de venta de electrodomésticos. La administración lleva el control de sus ventas a las cuatro principales cadenas en un orden tal que sea interpretado por cualquier empleado de la empresa: tanto productos como cadenas se encuentran en orden alfabético, las filas siempre representan los productos, las columnas siempre representan las cadenas. Por ejemplo, en el mes de febrero, que es uno de los meses que representa cualquier mes normal del año, las ventas fueron:

	FRAGATA	GARBATO	MUNDOMUSIC	RODA
Celular	50	120	80	90
Smart TV	60	150	65	34
Tablet	42	96	110	46

Al encontrarse dicha información siempre de la misma manera, se puede prescindir de los nombres de filas y columnas y presentar la misma información en el siguiente formato:

$$\text{Ventas de febrero} = \begin{pmatrix} 50 & 120 & 80 & 90 \\ 60 & 150 & 65 & 34 \\ 42 & 96 & 110 & 46 \end{pmatrix}$$

Todo empleado de la empresa sobreentiende los datos dadas las características de ordenación.
En el mes de junio, por el día del padre, todas las cadenas comerciales deciden duplicar su pedido normal con la esperanza de duplicar sus ventas, entonces la información de la empresa para junio será:

$$\text{Ventas de junio} = \begin{pmatrix} 100 & 240 & 160 & 180 \\ 120 & 300 & 130 & 68 \\ 84 & 192 & 220 & 92 \end{pmatrix}$$

La forma de obtenerla es multiplicar por dos las cantidades de cada producto vendidos a cada cadena.
La misma situación se da en el mes de octubre por el día de la madre, entonces la información de octubre será también:

$$\text{Ventas de octubre} = \begin{pmatrix} 100 & 240 & 160 & 180 \\ 120 & 300 & 130 & 68 \\ 84 & 192 & 220 & 92 \end{pmatrix}$$

En el mes de diciembre y enero, esperando las ventas de fin de año y de reyes, las ventas tienen un comportamiento distinto a los del resto del año:

$$\text{Ventas de diciembre} = \begin{pmatrix} 90 & 200 & 150 & 160 \\ 80 & 60 & 48 & 52 \\ 90 & 160 & 122 & 63 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{Ventas de enero} = \begin{pmatrix} 80 & 120 & 122 & 86 \\ 90 & 50 & 45 & 50 \\ 88 & 112 & 100 & 65 \end{pmatrix}$$

Entonces si se quiere saber cuáles fueron las ventas a las cadenas de cada producto para las fiestas de navideñas, alcanzaría con sumar las de diciembre y las de enero.

$$\text{Ventas de navideñas} = \begin{pmatrix} 170 & 320 & 272 & 246 \\ 170 & 110 & 93 & 102 \\ 178 & 272 & 222 & 128 \end{pmatrix}$$

Esta forma de llevar el control de ventas de la empresa se hace a través de *matrices*, que permite mantener los datos ordenados siempre de la misma manera.
Al calcular tanto las ventas de junio como las de octubre, se multiplicó la matriz correspondiente a un mes normal por 2.
Al calcular las ventas navideñas, se sumó las matrices de los meses de diciembre y enero.
Esta información le permite a la empresa conocer cuántos de cada uno de sus productos solicitará cada cadena para la venta, y así poder inferir su producción para el próximo año.
También se puede conocer más información utilizando estas y otras matrices, como, por ejemplo: cuántos celulares deben producir mensualmente, cuál es el ingreso de la empresa por la venta de tablets, cuál es el beneficio obtenido por la venta de smart tv, etc.; pero estas y otras preguntas más requieren operaciones entre matrices que tal vez no sean tan intuitivas como las anteriores.
Para poder responder a estas preguntas u otras que puedan surgir, pasaremos a analizar los conceptos matemáticos que están detrás de ellas…

Definición de matriz:

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, se denomina matriz de m filas y n columnas a un arreglo rectangular cuyos elementos son números reales (o complejos).

A las matrices se las nombra con letras mayúsculas de imprenta.
Una matriz A que tiene m filas y n columnas se dice que es de orden $m \times n$ y se nota $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
$\mathbb{R}$ representa el conjunto de números reales, de donde son los elementos que forman la matriz (nosotros no trabajaremos con números complejos). Los elementos se representan con letras minúsculas.

Hay distintas formas de generalizar la escritura de una matriz; cada una de ellas nos será útil en diversas situaciones:

En forma "completa": $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$: a_{ij} es un número real.
$i \in \mathbb{N}; \quad 1 \le i \le m$ representa la fila en la que está ubicado el elemento a_{ij}.
$j \in \mathbb{N}; \quad 1 \le j \le n$ representa la columna en la que está ubicado el elemento a_{ij}.
SIEMPRE se indica primero la fila, luego la columna.
a_{ij} es el número que se encuentra en la fila i y la columna j.

En forma abreviada: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

Por filas: $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

A_i: representa la fila i de la matriz, con $i \in \mathbb{N}; \quad 1 \le i \le m$
$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ que también se puede pensar como una matriz de 1 fila y n columnas y lo más común es denominarlo *vector fila*.

Por columnas: $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{pmatrix}$

A^j: representa la columna j de la matriz, con $j \in \mathbb{N}; \quad 1 \le j \le n$

$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ que también se puede pensar como una matriz de m filas y 1 columna, y lo más común es denominarlo *vector columna*.

Ejemplos:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $A\in\mathbb{R}^{2\times 3}$, es decir, tiene 2 filas y 3 columnas, es de orden 2×3.

   a) Los elementos de la matriz A son: $a_{11}=2$; $a_{12}=-5$; $a_{13}=4$; $a_{21}=0$; $a_{22}=1$; $a_{23}=-3$

   b) Las 2 filas de A son: $A_1=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ y $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   c) Las 3 columnas de A son: $A^1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A^3=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B\in\mathbb{R}^{3\times 2}$, es decir, tiene 3 filas y 2 columnas, es de orden 3×2.

   a) Los elementos de la matriz B son: $b_{11}=-1$; $b_{12}=4$; $b_{21}=2$; $b_{22}=5$; $b_{31}=1$; $b_{32}=1$

   b) Las 3 filas de B son: $B_1=\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$; $B_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

   c) Las 2 columnas de B son: $B^1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B^2=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$; $C\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, es decir, tiene 3 filas y 3 columnas, es de orden 3×3. Cuando una matriz tiene la misma cantidad de filas y de columnas, se dice que es una matriz *cuadrada*.
   Como $C\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, alcanza con decir que es de orden 3

   a) Los elementos de la matriz C son: $c_{11}=2$; $c_{12}=5$; $c_{13}=8$; $c_{21}=-1$; $c_{22}=4$; $c_{23}=3$; $c_{31}=5$; $c_{32}=-1$; $c_{33}=6$

   b) Las 3 filas de C son: $C_1=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; $C_2=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C_3=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

   c) Las 3 columnas de C son: $C^1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $C^2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C^3=\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

4) $E=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, es decir, tiene 2 filas y 2 columnas, es de orden 2 (pues es cuadrada de orden 2×2).

   a) Los elementos de la matriz E son: $e_{11}=0$; $e_{12}=0$; $e_{21}=0$; $e_{22}=1$

   b) Las 2 filas de E son: $E_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

   c) Las 2 columnas de E son: $E^1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E^2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $F=\left(f_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}}$ con $f_{ij}=\begin{cases} 2j & si \quad i<j \\ 1 & si \quad i=j \\ j^2-2i & si \quad i>j \end{cases}$; $F\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, indicado en el subíndice de la forma abreviada, F es de orden 3.
   La matriz F está determinada por una condición sobre cada uno de sus elementos

   a) Los elementos de la matriz F son:
      $f_{11}=1$ pues $i=1$ y $j=1$, entonces $i=j$

$f_{12} = 2.2 = 4$ pues $i = 1$ y $j = 2$, entonces $i < j$
$f_{13} = 2.3 = 6$ pues $i = 1$ y $j = 3$, entonces $i < j$
$f_{21} = 1^2 - 2.2 = -3$ pues $i = 2$ y $j = 1$, entonces $i > j$
$f_{22} = 1$ pues $i = 2$ y $j = 2$, entonces $i = j$
$f_{23} = 2.3 = 6$ pues $i = 2$ y $j = 3$, entonces $i < j$
$f_{31} = 1^2 - 2.3 = -5$ pues $i = 3$ y $j = 1$, entonces $i > j$
$f_{32} = 2^2 - 2.3 = -2$ pues $i = 3$ y $j = 2$, entonces $i > j$
$f_{33} = 1$ pues $i = 3$ y $j = 3$, entonces $i = j$

Entonces $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 6 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Las 3 filas de F son: $F_1 = (1 \quad 4 \quad 6)$; $F_2 = (-3 \quad 1 \quad 6)$ y $C_3 = (-5 \quad -2 \quad 1)$

c) Las 3 columnas de F son: $F^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $F^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $F^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Igualdad de matrices</u>:

Dadas dos matrices de igual orden, se dice que son iguales si tiene los mismos elementos en las mismas posiciones, es decir:

"Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \quad 1 \le i \le m \quad \wedge \quad 1 \le j \le n$"

<u>Ejemplos</u>:

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ $A = B$ pues todos los elementos de A y B coinciden.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $A \ne B$ pues $a_{13} = -2$ y $b_{13} = 3$; el elemento de la fila 1 columna 3 de A no coincide con el elemento de la fila 1 columna 3 de B, aunque los demás elementos de A y B coinciden.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $A \ne B$ pues $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

4) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ x+3y & y \end{pmatrix}$ $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 2} \\ a_{12} = b_{12} \Rightarrow -2 = -2 \\ a_{21} = b_{21} \Rightarrow 5 = x + 3y \Rightarrow 5 = 2 + 3.1 \\ a_{22} = b_{22} \Rightarrow \boxed{1 = y} \end{cases}$

$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

5) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2x & 4\\ x+3y & y\end{pmatrix}$ $A\neq B$ *pues* $\begin{cases} a_{11}=b_{11} \Rightarrow 4=2x \Rightarrow \boxed{x=2} \\ a_{12}\neq b_{12} \Rightarrow -2\neq 4 \\ a_{21}=b_{21} \Rightarrow 5=x+3y \Rightarrow 5=2+3.1 \\ a_{22}=b_{22} \Rightarrow \boxed{1=y} \end{cases}$

$A\neq B$ a pesar de hallar $\begin{cases} x=2\\ y=1\end{cases}$

Eso significa que no existen valores de x ni de y que permitan que $A=B$ (aunque se han encontrado candidatos)

Algunas matrices importantes:

A medida que vayamos estudiando álgebra, nos vamos a ir encontrando con algunas matrices que son importantes por sus propiedades. Estas son:

Matriz nula: Es la matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero. En general la notaremos como N. Entonces, $N\in\mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz nula $\Leftrightarrow$ $n_{ij}=0 \quad \forall \quad 1\leq i\leq m \quad \wedge \quad 1\leq j\leq n$

Ejemplos:

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3};\ N=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3};\ N=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 1};\ N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2};\ N=(0)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$$

Matriz fila: Es una matriz formada por una fila **y** n columnas, por lo tanto, es de orden $1\times n$, también llamada *vector fila*: $F=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times n}$

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 3};\quad B=\begin{pmatrix}0 & \frac{5}{2} & 4 & -5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 4};\quad C=\begin{pmatrix}-2 & -4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 2};\quad N=(0)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$$

Matriz columna: Es una matriz formada por m filas **y** 1 columna, por lo tanto, es de orden $m\times 1$, también llamada *vector columna*: $C=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ \vdots\\ c_{m1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times 1}$

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}2\\4\\1\\-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 1};\quad B=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 1};\quad C=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 1};\quad N=(0)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$$

Matriz traspuesta: Dada una matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, se denomina matriz traspuesta de A, y se nota A^t a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas de A (o columnas por filas de A): $A^t=\left(a_{ji}\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq m}}\in\mathbb{R}^{n\times m}$.

Nota: $\forall \ A\in\mathbb{R}^{m\times n}: \ \left(A^t\right)^t = A$

Ejemplos:

Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3}$, entonces $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times2}$

Si $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$, entonces $B^t=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$

Si $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times4}$, entonces $C^t=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times1}$

Si $E=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$, entonces $E^t=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$

Matriz cuadrada: Es una matriz que tiene igual cantidad de filas que de columnas, es decir, A es una matriz cuadrada si A es de orden $n\times n$ y se suele decir que es de orden n. Muchas veces se nota A_n para indicar que $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ -5 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}; \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

Cuando tenemos una matriz cuadrada, podemos definir algunos elementos:

- ***Diagonal:*** La diagonal de una matriz cuadrada $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ está formada por los elementos de la forma a_{ii}, con $1\le i\le n$: $a_{11}; a_{22}; a_{33}; \cdots; a_{nn}$.

En los ejemplos anteriores:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ -5 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ Diagonal de $A=\{2;-1;4;3\}$;

$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Diagonal de $B=\{4;-1\}$;

$C=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ Diagonal de $C=\{4;2;-6\}$

- ***Traza:*** La traza de una matriz cuadrada $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es la suma de los elementos de la diagonal, es decir $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$

En los ejemplos anteriores:

$$Tr(A)=2+(-1)+4+3=8;$$
$$Tr(B)=4+(-1)=3;$$
$$Tr(C)=4+2+(-6)=0$$

Dentro del conjunto de matrices cuadradas, también hay matrices que son importantes:

- ***Matriz triangular superior:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos por debajo de la diagonal son nulos: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior $\Leftrightarrow \quad a_{ij}=0 \quad \forall \quad 1\le j<i\le n$

  Ejemplos:

  $$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}4 & -6 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

- ***Matriz triangular inferior:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos por encima de la diagonal son nulos: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior $\Leftrightarrow \quad a_{ij}=0 \quad \forall \quad 1\le i<j\le n$

  Ejemplos:

  $$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

- ***Matriz diagonal:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal son nulos: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal $\Leftrightarrow \quad a_{ij}=0 \quad \forall \quad 1\le i\ne j\le n$

  Ejemplos:

  $$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}; \qquad E=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

  Una matriz diagonal se puede pensar como una matriz que simultáneamente es triangular superior y triangular inferior.

  Nota: La matriz nula es una matriz diagonal.

- ***Matriz escalar:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal son una misma constante, es decir, A es una matriz escalar si A es diagonal y los elementos de la diagonal son la misma contante:

  $$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A \text{ es escalar} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{ij}=0 & \forall \quad 1\le i\ne j\le n\\ a_{ij}=k & \forall \quad 1\le i=j\le n\end{cases}$$

  $$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A \text{ diagonal es escalar} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii}=k \quad \forall \quad 1\le i\le n$$

  Ejemplos:

  $$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

  Nota: La matriz nula es una matriz escalar.

- ***Matriz identidad:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal son 1. Esta matriz se notará siempre como I cuando se conoce la dimensión, o bien como I_n para indicar que es de orden n, ya sea porque no se conoce su dimensión o porque se puede requerir la matriz identidad de distintos órdenes.

  I es la matriz identidad si I es escalar y los elementos de la diagonal son 1:

  $$I \in \mathbb{R}^{n\times n},\ I \text{ es la matriz identidad} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{ij}=0 & \forall \quad 1\le i\ne j\le n\\ a_{ij}=1 & \forall \quad 1\le i=j\le n\end{cases}$$

$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, I diagonal es la matriz identidad $\Leftrightarrow$ $a_{ii} = 1 \quad \forall \quad 1 \le i \le n$

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: La matriz identidad es una matriz escalar.

- ***Matriz simétrica:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos son simétricos respecto a la diagonal: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall \quad 1 \le i \le n, \quad \forall \quad 1 \le j \le n$

  Otra forma de definir matriz simétrica: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow$ $A = A^t$

  Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Verifica que, en cada caso, la matriz coincide con su traspuesta.

  Nota: Toda matriz diagonal es simétrica, entonces las escalares también y por lo tanto son simétricas las matrices nula e identidad.

- ***Matriz antisimétrica:*** Es una matriz cuadrada cuyos elementos simétricos respecto a la diagonal son opuestos: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall \quad 1 \le i \le n, \quad \forall \quad 1 \le j \le n$

  Otra forma de definir matriz antisimétrica: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A = -A^t$

  Para respetar la definición de matriz antisimétrica: $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall \quad 1 \le i \le n, \quad \forall \quad 1 \le j \le n$, en particular se debe verificar $a_{ii} = -a_{ii} \quad \forall \quad 1 \le i \le n$, o sea también lo deben verificar los elementos de la diagonal, pero para que esta condición se cumpla, debe ser $2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$, por lo tanto, una matriz antisimétrica tiene los elementos de la diagonal nulos.

  Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Verifica que en cada caso, la matriz coincide con la opuesta de su traspuesta.

  Nota: La única matriz diagonal que es antisimétrica es la matriz nula.

- ***Matriz ortogonal:*** Es una matriz cuadrada que verifica que su inversa es su traspuesta, es decir: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^t$, o expresado de otra forma:

  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal $\Leftrightarrow$ $A.A^t = A^t.A = I_n$

  Para que una matriz sea ortogonal, debe cumplirse que los vectores columna que la forman sean ortonormales dos a dos.

  Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Si bien estos son ejemplos de matrices ortogonales, aún no es posible verificarlo puesto que faltan los conceptos de vectores ortonormales, de producto de matrices y de matriz inversa.
Nota: La única matriz diagonal que es ortogonal es la matriz identidad.

- ***Matriz idempotente:*** Es una matriz cuadrada que verifica que es igual a su cuadrado, es decir: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es idempotente $\Leftrightarrow$ $A^2 = A$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si bien estos son ejemplos de matrices idempotentes, aún no es posible verificarlo puesto que falta el concepto de producto de matrices, y por lo tanto, de potencia de matrices.
Nota: La única matriz diagonal que es idempotente es la matriz identidad.

- ***Matriz involutiva:*** Es una matriz cuadrada que verifica que su cuadrado es la identidad, es decir: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es involutiva $\Leftrightarrow$ $A^2 = I_n$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si bien estos son ejemplos de matrices involutivas, aún no es posible verificarlo puesto que falta el concepto de producto de matrices, y por lo tanto, de potencia de matrices.
Nota: Las únicas matrices diagonales que son involutivas son las que tienen 1 o (-1) en la diagonal, en particular, la matriz identidad.

- ***Matriz nilpotente:*** Es una matriz cuadrada que verifica que alguna de sus potencias es la matriz nula, es decir: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es nilpotente $\Leftrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = N$.

El mínimo número $k \in \mathbb{N}$ que cumple esta condición se denomina índice de nilpotencia de A y verifica: $k \le n$ y además, $\forall p \in \mathbb{N},\quad p \ge k:\ A^p = N$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

A tiene índice 4: $k = 4$; B tiene índice 2: $k = 2$; C tiene índice 2: $k = 2$
Si bien estos son ejemplos de matrices nilpotentes, aún no es posible verificarlo puesto que falta el concepto de producto de matrices, y por lo tanto, de potencia de matrices.
Nota: Las matrices triangulares que además tienen la diagonal sólo formada por ceros son nilpotentes.

Método de Gauss- Jordan:

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, el método de Gauss-Jordan sirve para hallar una matriz equivalente a A (en muchos temas de álgebra la podríamos utilizar a cambio de A), pero que tiene muchos ceros. La definición formal de matriz equivalente será vista en la UNIDAD TEMÁTICA Nº 3.
Iremos viendo cómo es el procedimiento a través de un ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 4 & 7 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$

pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 4 & 7 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Paso 1}$$

Primera Matriz

$$\begin{pmatrix} \square & 0 & -1 & \square & \square \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \square & 0 & -1 & \square & \square \\ \square & 0 & -2 & \square & \square \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Pasos 2; 3 y 4}$$

Paso 5

$$\begin{pmatrix} \boxed{-5} & 0 & -1 & \boxed{-9} & \boxed{-14} \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \boxed{-5} & 0 & -1 & \boxed{-9} & \boxed{-14} \\ \boxed{-10} & 0 & -2 & \boxed{-18} & \boxed{-28} \end{pmatrix}$$

Paso 6 ‑ ‑ ‑ → Paso 1

No podemos elegir la fila 2, y en las otras filas, no tenemos unos, entonces elijamos un pivote de manera que tengamos la mayor cantidad de ceros en la fila y columna del pivote.

Segunda Matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & -9 & -14 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \square & 0 & 0 & \square & \square \\ \square & 0 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \quad \text{Pasos 2; 3 y 4}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & -9 & -14 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Paso 5}$$

Paso 6

No podemos elegir la fila 2, pero tampoco la fila 1. En las dos que quedan, sólo hay ceros.
Se terminó el proceso.

1) Vamos a elegir un pivote (siempre se marca): a_{ij}

Un pivote: - es un número distinto de 0 (cero)
- preferiblemente un 1 (uno)
- preferiblemente que se encuentre en una fila y/o columna que tenga "muchos" ceros.

Vamos a armar la nueva matriz:

2) Copiamos la fila del pivote.

3) Si en la fila del pivote hay un cero, copiamos la columna donde está dicho cero.
Si en la columna del pivote hay un cero, copiamos la fila donde está dicho cero.

4) Rellenamos la columna del pivote con ceros

Necesitamos llenar los lugares vacíos. Para ello, vamos a pensar en "cuadrados imaginarios" de cuatro números, cuyos vértices opuestos estén formados por el pivote y un lugar a completar, y realizaremos la siguiente operación:

5) $\dfrac{\textit{Pivote}\bullet(\textit{el número buscado}) - \textit{producto de la otra diagonal}}{\textit{Pivote}}$

Buscamos el lugar a_{kh}: $a'_{kh} = \dfrac{a_{ij} . a_{kh} - a_{kj} . a_{ih}}{a_{ij}}$

6) Comenzamos de nuevo. CONDICIÓN: el nuevo pivote elegido debe estar en una fila y columna distintas a las elegidas anteriormente (alcanza con elegir fila distinta).

El proceso se realizará hasta que no pueda tomar más pivotes.
La cantidad de veces que se realizará el proceso será a lo sumo, la cantidad de filas que tiene la matriz.

Cuentas: Primera Matriz obtenida

$a_{11} = \dfrac{1.1 - 3.2}{1} = -5$

$a_{14} = \dfrac{1.0 - 3.3}{1} = -9$

$a_{15} = \dfrac{1.(-2) - 3.4}{1} = -14$

$a_{31} = \dfrac{1.(-1) - 2.2}{1} = -5$

$a_{34} = \dfrac{1.(-3) - 2.3}{1} = -9$

$a_{35} = \dfrac{1.(-6) - 2.4}{1} = -14$

$a_{41} = \dfrac{1.4 - 7.2}{1} = -10$

$a_{44} = \dfrac{1.3 - 7.3}{1} = -18$

$a_{45} = \dfrac{1.0 - 7.4}{1} = -28$

Cuentas: Segunda Matriz obtenida

$$a_{31}=\frac{(-1).(-5)-(-5).(-1)}{-1}=0 \qquad a_{41}=\frac{(-1).(-10)-(-5).(-2)}{-1}=0$$

$$a_{34}=\frac{(-1).(-9)-(-9).(-1)}{-1}=0 \qquad a_{44}=\frac{(-1).(-18)-(-9).(-2)}{-1}=0$$

$$a_{35}=\frac{(-1).(-14)-(-14).(-1)}{-1}=0 \qquad a_{45}=\frac{(-1).(-28)-(-14).(-2)}{-1}=0$$

Este proceso lo utilizaremos para hacer casi todas las cuentas en los temas futuros.
Veamos otro ejemplo:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B\in\mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ \boxed{-1} & \boxed{-4} & 0 & \boxed{-2} \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-9} & 1 & \boxed{-1} \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{-10} & 0 & \boxed{-5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-7} & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Elegimos este pivote porque es un 1 y en la columna hay dos ceros. Los otros 1 de la matriz no tienen tantos ceros en sus filas o sus columnas.

-Copiamos la fila del pivote.
-En la columna del pivote hay cero en la segunda y cuarta filas: las copiamos.
-Completamos la columna del pivote con ceros.
-Buscamos los demás lugares.
-Elegimos un 1 como nuevo pivote (no puede ser de la primera fila).

-Copiamos la fila del pivote.
-En la fila del pivote hay un cero en la tercera columna: la copiamos.
-Completamos la columna del pivote con ceros.
-Buscamos los demás lugares.
-Elegimos el nuevo pivote (no puede ser de la primera ni de la segunda fila). Por ejemplo, tomemos el -5.

-Copiamos la fila del pivote.
-En la fila del pivote hay un cero en las primera y tercera columnas: las copiamos.
-En la columna del pivote hay un cero en la tercera fila: la copiamos.
-Completamos la columna del pivote con ceros.
-Buscamos los demás lugares.
-Ya no podemos elegir pivote porque la única fila no utilizada es de ceros.

Otro ejemplo:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C\in\mathbb{R}^{5\times 3}$$

Fila copiada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-2} \\ \boxed{-1} & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{8} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Ya se terminó el proceso

Columna copiada

Rango de una matriz:

Formalmente, se denomina rango fila de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a la cantidad de filas linealmente independientes y se denomina rango columna de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a la cantidad de columnas linealmente independientes.
El problema de la definición es el concepto de linealmente independiente, que veremos recién en la UNIDAD TEMÁTICA Nº 2.
Además, en la UNIDAD TEMÁTICA Nº 3 demostraremos que rango fila es igual a rango columna.
Por lo tanto, hablaremos de rango de una matriz y lo notaremos $Rg(A)$
El concepto de rango de una matriz será muy útil a la hora de tomar decisiones en determinados temas, por eso lo definimos ahora, aun cuando nos faltan conceptos para la definición.
Tanto en lo que resta de la UNIDAD TEMÁTICA Nº 1 como en la UNIDAD TEMÁTICA Nº 2, trabajaremos buscando el rango fila, entonces vamos a redefinirlo a partir de los conceptos conocidos hasta ahora:
"Se denomina rango de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a la cantidad de filas NO nulas que tiene una matriz equivalente a A, luego de aplicar en método de Gauss-Jordan hasta el final."
Por lo tanto, cuando busco el rango de una matriz, simplemente se le aplica el método de Gauss-Jordan y se ve la cantidad de filas no nulas que quedaron: ese número será el rango.
Siempre el rango coincide con la cantidad de pivotes tomados para hacer el proceso de Gauss-Jordan.
Por ejemplo, veamos las matrices a las cuales ya le hemos aplicado el proceso de Gauss- Jordan:

1) $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$. Luego de hacer el proceso de Gauss-Jordan, quedó una matriz equivalente a A cuyas dos primeras filas son NO nulas, entonces $Rg(A)=2$.

2) $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego de hacer el proceso de Gauss-Jordan, quedó una matriz equivalente a B que tiene las dos primeras y la cuarta filas son NO nulas, entonces $Rg(B)=3$.

3) $C \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. Luego de hacer el proceso de Gauss-Jordan, quedó una matriz equivalente a A cuyas dos primeras filas son NO nulas, entonces $Rg(A)=2$.

El rango de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ siempre es menor o igual al mínimo número de filas y columnas que tiene A: $Rg(A) \le mín\{m;n\}$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica que $Rg(A)=n$ se dice que A tiene rango máximo.

4) Hallar el rango de $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ y de $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Para A: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ Todas las filas son no nulas: $Rg(A)=2$

b) Para B: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ Una fila es no nula: $Rg(B)=1$

NOTA:
Nunca se pueden anular todas las filas de una matriz $A \ne N$, es decir, si A es no nula, $Rg(A) \ne 0$.
En particular, $Rg(N)=0$ (no puedo tomar pivotes pues todas sus filas son nulas).

Operaciones de matrices:

Si nos remitimos al ejemplo introductorio, la matriz que nos indica las ventas navideñas de la empresa a las cadenas la obtuvimos sumando las matrices que representan las ventas de diciembre y las de enero, mientras que las matrices que representan las ventas de junio y octubre las obtuvimos duplicando la matriz que representa un mes normal, en nuestro caso, febrero.
Esta posibilidad de análisis sobre las ventas en determinados meses nos conduce a definir operaciones para las matrices.

Adición de matrices:

Sean $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, se denomina matriz suma entre A y B a la matriz

$$A+B=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

Ejemplos:

1) $$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}\\ B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -6 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}\end{array}\right\}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}2+5 & -1+3\\ 4+(-6) & 5+2\\ -3+(-2) & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -2 & 7\\ -5 & 5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$$

2) $$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\\ B=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 4 & 5 & -3\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\end{array}\right\}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}-1+5 & 0+(-2) & 1+(-1)\\ 2+4 & -1+5 & 4+(-3)\\ 0+2 & 1+(-3) & 3+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

3) $$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\\ B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\end{array}\right\}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}-1+1 & 2+(-2)\\ 4+(-2) & -6+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

Propiedades de la adición de matrices:

- ***Ley de composición interna o ley de cierre:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\text{ y }\forall\ B\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ A+B\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

- ***Propiedad Asociativa:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n};\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{m\times n}\text{ y }\forall\ C\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

- ***Existencia de elemento neutro:***

$$\exists\ N\in\mathbb{R}^{m\times n}\text{ que verifica }\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ A+N=N+A=A$$

N es la matriz nula.

Existencia de elemento simétrico:

$\forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\exists\ A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que verifica: $A + A' = A' + A = N$

$A' = -A$, es la matriz opuesta de A (todos los elementos de $-A$ son los opuestos de los correspondientes elementos de A)

Por verificar estas cuatro propiedades, el conjunto de las matrices de orden $m \times n$, con la operación aditiva, $\left(\mathbb{R}^{m\times n};+\right)$ tiene una estructura algebraica de *grupo* (UNIDAD TEMÁTICA Nº 2).

Propiedad Conmutativa:

$$\forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ y } \forall\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}:\ A + B = B + A$$

Por verificar estas cinco propiedades, el conjunto de las matrices de orden $m \times n$, con la operación aditiva, $\left(\mathbb{R}^{m\times n};+\right)$ tiene una estructura algebraica de *grupo abeliano* (UNIDAD TEMÁTICA Nº 2).

Sustracción de matrices:

Sean $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se denomina matriz resta entre A y B a la matriz $A - B = A + \left(-B\right)$

De esta manera, pensaremos la sustracción como una adición, y así podremos asegurar que se verifican las propiedades de la adición y operar matrices de la misma manera.

Ejemplos:

1) $$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 7 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2) $$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$$

Definición de escalar:

Se denomina escalar a un número real que se lo considerará elemento en sí mismo. Por ejemplo, si necesito sumar una matriz A dos veces, puedo hacer $A+A$ o bien podría pensar en el concepto primario de multiplicación, y hacer "sumo 2 veces la matriz A", que notaríamos $2\cdot A$. El número 2 es el escalar. La idea de "sumar muchas veces" se podría generalizar para cualquier número real.
De esta manera, desde ahora trabajaremos con dos conjuntos, el de los números reales, $\mathbb{R}$, y el de las matrices de un determinado orden, $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Normalmente, a los escalares se los representan con letras griegas.

Producto de una matriz POR un escalar:

Sean $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, se denomina matriz producto entre λ y A a la matriz $\lambda\cdot A=\left[\left(\lambda.a_{ij}\right)_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejemplos:

1) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 6 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ y $\lambda=2$ $\Rightarrow$ $2\cdot A=\begin{pmatrix}2.(-2) & 2.3\\ 2.6 & 2.(-5)\\ 2.(-3) & 2.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 12 & -10\\ -6 & 4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\lambda=-3$ $\Rightarrow$ $-3\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ -6 & 3 & -12\\ 0 & -3 & -9\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

3) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\lambda=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ -2 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar:

- ***Ley de composición externa:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\ \text{y}\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda\cdot A\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

- ***Propiedad Asociativa Mixta:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n};\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{y}\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}:\ (\lambda.\alpha)\cdot A=\lambda\cdot(\alpha\cdot A)$$

- ***Existencia de elemento pseudoneutro:***

$$\exists\ 1\in\mathbb{R}\ \text{que verifica}\ \forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ 1\cdot A=A\cdot 1=A$$

- ***Propiedad Conmutativa Mixta:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\ \text{y}\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda\cdot A=A\cdot\lambda$$

- ***Propiedad Distributiva respecto a la adición de matrices:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n};\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{m\times n}\ \text{y}\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$$

- ***Propiedad Distributiva respecto a la adición de escalares:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n};\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{y}\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}:\ (\lambda+\alpha)\cdot A=\lambda\cdot A+\alpha\cdot A$$

Por verificar las cinco propiedades de la adición y las seis propiedades del producto por un escalar, el conjunto de las matrices de orden $m \times n$, con la operación aditiva, y el conjunto de números reales con la posibilidad del producto de una matriz por un escalar, $\left(\mathbb{R}^{m\times n};+;\mathbb{R};\cdot\right)$ tiene una estructura algebraica de *espacio vectorial* (UNIDAD TEMÁTICA Nº 2).
Estas once propiedades se las conoce como axiomática de *espacios vectoriales*, en este caso, $\mathbb{R}^{m\times n}$: son todas propiedades que podemos verificar que se cumplen pero que no se pueden demostrar, es natural que se verifiquen.
Hay otras propiedades, que se verifican con ambas operaciones que no son parte de la axiomática, puesto que son posibles demostrar a partir de la axiomática. Acá sólo serán enunciadas; sus demostraciones están en el apéndice.

<u>Propiedades de las operaciones con matrices</u>:

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $0 \in \mathbb{R}$ (cero: el elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}$), entonces,
$$0 \cdot A = N \quad (N \text{ matriz nula})$$

2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (N matriz nula, el elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}^{m\times n}$), entonces,
$$\lambda \cdot N = N$$

3) Si $\lambda \cdot A = N \Rightarrow \lambda = 0 \ \vee \ A = N$

4) $-1 \cdot A = -A$

5) $-\left(A+B\right) = -A-B$

6) $\lambda \cdot \left(A-B\right) = \lambda \cdot A - \lambda \cdot B$

7) $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$

8) $\left(\lambda \cdot A\right)^t = \lambda \cdot A^t$

9) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Tr\left(A+B\right) = Tr\left(A\right) + Tr\left(B\right)$

10) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Tr\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda . Tr\left(A\right)$

11) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A + A^t$ es simétrica

12) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A - A^t$ es antisimétrica

13) $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Producto escalar o producto interno:

Sean $\vec{v}=(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)$ y $\vec{w}=(y_1;y_2;y_3;\cdots;y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ (matrices fila), se denomina producto escalar o producto interno entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al número real que se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{v}\bullet\vec{w}=x_1.y_1+x_2.y_2+x_3.y_3+\cdots+x_n.y_n$$

Ejemplos:

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(1;-2;3;5)\\ \vec{w}=(5;3;-2;1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=1.5+(-2).3+3.(-2)+5.1 \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=-2$

2) $\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(3;2;-1)\\ \vec{w}=(5;2;3)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=3.5+2.2+(-1).3 \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=16$

3) $\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(2;3;-3;5;4)\\ \vec{w}=(4;2;8;2;0)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=2.4+3.2+(-3).8+5.2+4.0 \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{w}=0$

4) Sea $\vec{p}=(15;20;12)$ es vector que representa los precios de tres bienes A, B y C que María compró en el supermercado, y sea $\vec{c}=(4;2;3)$ el vector que representa las cantidades de cada uno de los bienes comprados, respectivamente. El producto escalar $\vec{p}\bullet\vec{c}=15.4+20.2+12.3=136$ representa la cantidad abonada por María en el supermercado.

Propiedades del producto escalar: (demostradas en el apéndice)

Sean $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{w}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$

1) $\vec{v}\bullet\vec{v}\geq 0$
2) $\vec{v}\bullet\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{v}=0$
3) $\vec{v}\bullet\vec{w}=\vec{w}\bullet\vec{v}$
4) $\vec{v}\bullet(\vec{w}+\vec{u})=\vec{v}\bullet\vec{w}+\vec{v}\bullet\vec{u}$
5) $(\lambda\cdot\vec{v})\bullet\vec{w}=\lambda\cdot(\vec{v}\bullet\vec{w})$ y $\vec{v}\bullet(\lambda\cdot\vec{w})=\lambda\cdot(\vec{v}\bullet\vec{w})$
6) Si $\vec{v}\bullet\vec{w}=0$ con $\vec{v}\neq 0$ y $\vec{w}\neq 0$, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se denominan *ortogonales* (determinan un ángulo recto).

Producto de matrices:

Sean $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$, se denomina producto entre las matrices A y B a la matriz $A.B\in\mathbb{R}^{m\times p}$ que se obtiene realizando el producto escalar entre cada fila de A y cada columna de B.
Como vimos en la definición de matrices, podemos notar a las matrices por filas o por columnas:

Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}$ donde A_i es la $i-ésima$ fila de A, $A_i\in\mathbb{R}^n$ es un vector fila, y sea $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$, $B=\begin{pmatrix}B^1 & B^2 & \cdots & B^p\end{pmatrix}$ donde B^j es la $j-ésima$ columna de B, $B^j\in\mathbb{R}^n$ es un vector columna, entonces la matriz $A.B=\left[\left(A_i\bullet B^j\right)_{ij}\right]_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq p}}$ .Por lo tanto $A.B\in\mathbb{R}^{m\times p}$.

Es importante tener en cuenta que tanto las filas de A como las columnas de B son vectores de $\mathbb{R}^n$, de la misma dimensión. De no ser así, no está definido el producto escalar entre ellos, y por lo tanto, no es posible hallar el producto de las matrices.

Ejemplos:

1) $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

a) Hallar $A.B$ y determinar su orden.

$$A.B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{matrix} A_1=\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} \\ A_2=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ A_3=\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B^1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\ B^3=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Entonces, como las filas de A y las columnas de B son vectores de $\mathbb{R}^2$, realizamos los siguientes productos de $\mathbb{R}^2$ para obtener $A.B$:

$$\left.\begin{aligned}
A_1\bullet B^1&=\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=5.4+(-1).(-2)=20+2=22\\
A_1\bullet B^2&=\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=5.3+(-1).5=15-5=10\\
A_1\bullet B^3&=\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}=5.2+(-1).8=10-8=2\\
A_2\bullet B^1&=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=2.4+4.(-2)=8-8=0\\
A_2\bullet B^2&=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=2.3+4.5=6+20=26\\
A_2\bullet B^3&=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}=2.2+4.8=4+32=36\\
A_3\bullet B^1&=\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=-3.4+2.(-2)=-12-4=-16\\
A_3\bullet B^2&=\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=-3.3+2.5=-9+10=1\\
A_3\bullet B^3&=\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}=-3.2+2.8=-6+16=10
\end{aligned}\right\}$$

$$A.B$$

$$3\times\underbrace{\boxed{2}\quad\boxed{2}}_{\text{coinciden}}\times 3$$

Orden de $A.B: 3\times 3$

$$A.B=\begin{pmatrix} 22 & 10 & 2 \\ 0 & 26 & 36 \\ -16 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Hallar $B.A$ y determinar su orden.

$$B.A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como ahora necesitamos hacer $B.A$, vamos a hacer el producto escalar de las filas de B por las columnas de A

$$\begin{matrix} B_1=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ B_2=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad A^1=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};\ A^2=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, como las filas de B y las columnas de A son vectores de $\mathbb{R}^3$, realizamos los siguientes productos de $\mathbb{R}^3$ para obtener $B.A$:

$$\left.\begin{array}{l}
B_1.A^1=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}=4.5+3.2+2.(-3)=20+6+(-6)=20\\[2ex]
B_1.A^2=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}=4.(-1)+3.4+2.2=-4+12+4=12\\[2ex]
B_2.A^1=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}=(-2).5+5.2+8.(-3)=-10+10-24=-24\\[2ex]
B_2.A^2=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}=(-2).(-1)+5.4+8.2=2+20+16=38
\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{B.A}$$

$$\underbrace{2\times\boxed{3}\ \ \boxed{3}\times 2}_{\text{coinciden}}$$

Orden de $A.B: 2\times 2$

$$B.A=\begin{pmatrix}20 & 12\\-24 & 38\end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\4 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\3 & -4\end{pmatrix}$

a) Hallar $A.B$ y determinar su orden.

Como las filas de A y las columnas de B son vectores de $\mathbb{R}^2$, realizamos los siguientes productos de $\mathbb{R}^2$ para obtener $A.B$:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1\bullet B^1=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=10+(-3)=7\\[1ex]
A_1\bullet B^2=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=2+4=6\\[1ex]
A_2\bullet B^1=\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=20+9=29\\[1ex]
A_2\bullet B^2=\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=4+(-12)=-8\\[1ex]
A_3\bullet B^1=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=5+6=11\\[1ex]
A_3\bullet B^2=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=1+(-8)=-7
\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{A.B}$$

$$\underbrace{3\times\boxed{2}\ \ \boxed{2}\times 2}_{\text{coinciden}}$$

Orden de $A.B: 3\times 2$

$$A.B=\begin{pmatrix}7 & 6\\29 & -8\\11 & -7\end{pmatrix}$$

b) Hallar $B.A$ y determinar su orden.

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{B.A}\\ 2\times\boxed{2}\ \ \boxed{3}\times 2\\ \text{NO coinciden}\end{array}\right\}$$

No tiene sentido hacer $B.A$ en este caso

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar $A.B$ y determinar su orden.

$$A.B=\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad -2} \\ 5 \quad 8 \quad 3 \\ -2 \quad 4 \quad -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 13 \\ 30 & 9 & 3 \\ -12 & -27 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A.B$$

$$\underbrace{3\times\boxed{3}\quad\boxed{3}\times 3}_{\text{coinciden}}$$

Orden de $A.B:3\times 3$

b) Hallar $B.A$ y determinar su orden.

$$B.A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 66 & 2 \\ -11 & -27 & -8 \\ 19 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B.A$$

$$\underbrace{3\times\boxed{3}\quad\boxed{3}\times 3}_{\text{coinciden}}$$

Orden de $A.B:3\times 3$

$$A.B\neq B.A$$

<u>*Conclusiones*</u>:

- En el *ejemplo 1*, podemos ver que se puede hallar el producto $A.B$ y el producto $B.A$, pero las dos matrices obtenidas son de distinto orden.
- En el *ejemplo 2*, se puede hallar el producto $A.B$ pero el producto $B.A$ no se puede hallar porque no coinciden la cantidad de columnas de B con la cantidad de filas de A, es decir, las filas de B y las columnas de A no tienen la misma cantidad de coordenadas, y por lo tanto no podemos hallar los productos escalares en este caso.
- En el *ejemplo 3*, podemos ver que se puede hallar el producto $A.B$ y el producto $B.A$, y además, las dos matrices obtenidas son del mismo orden, pero son distintas.

Es necesario tener en cuenta cuál es el producto que podemos realizar y cuál nos piden que realicemos, porque podemos llegar a resultados no deseados.

<u>Propiedades del producto de matrices</u>:

- ***<u>Ley de composición interna</u>:***

Esta propiedad NO se cumple. Para multiplicar matrices es necesario tener en cuenta que coincidan cantidad de columnas de la primera con cantidad de filas de la segunda, lo que ya nos está diciendo que no siempre es posible multiplicar. Además, el orden del producto, cuando este existe, también depende del orden de cada una de las matrices, por lo tanto no se puede generalizar.

<u>NOTA</u>: $\forall\ A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $\forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times n}$: $A.B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, si sólo trabajamos con matrices cuadradas de orden n, SÍ se verifica la ley de composición interna.

- ***<u>Propiedad asociativa</u>:***

$$\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p},\ \forall\ C\in\mathbb{R}^{p\times q}:\ A.(B.C)=(A.B).C$$

- ***<u>Existencia de elemento neutro</u>:***

Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Si existe elemento neutro, llamémoslo E, este es único (UNIDAD TEMÁTICA Nº 2) y debe verificar: $A.E=E.A=A$.

La matriz identidad es la matriz que cumple con la condición $A.I=A$ y también $I.A=A$, pero I es una matriz cuadrada, y si analizamos la situación veremos:

$$\left.\begin{array}{lcl} \underset{m\times \boxed{n}}{A}\,.\,\underset{\boxed{n}\times n}{I}=\underset{m\times n}{A} & \Rightarrow & I=I_n \\ \underset{m\times \boxed{m}}{I}\,.\,\underset{\boxed{m}\times n}{A}=\underset{m\times n}{A} & \Rightarrow & I=I_m \end{array}\right\} \quad I_m\neq I_n$$

I_n se denomina neutro a derecha.

I_m se denomina neutro a izquierda.

Entonces, si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ NO HAY elemento neutro. Sólo podría existir en el caso que $m=n$.

<u>NOTA</u>: $\exists\ I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $\forall\ A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: $A.I_n=I_n.A=A$

I_n es la matriz identidad.

- ***<u>Existencia de elemento simétrico</u>:***

Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Si existe elemento simétrico, llamémoslo A', este es único (UNIDAD TEMÁTICA Nº 2) y debe verificar: $A.A'=A'.A=E$. Como vimos en el anterior ítem, no existe en este caso elemento neutro, por lo tanto no se le puede pedir a un producto que dé por resultado el neutro. En este caso NO existe elemento simétrico.

<u>NOTA</u>: Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, como en este caso particular sí hay elemento neutro, tiene sentido buscar $A'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ que verifique $A.A'=A'.A=I_n$. Si dicha matriz existe, la notaremos $A'=A^{-1}$ y la denominaremos matriz inversa de A.

Entonces, si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tiene inversa, la inversa es $A^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y verifica $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$.

Para que $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tenga inversa, entonces A debe tener rango máximo, rango n: $Rg\left(A\right)=n$

Una matriz que tiene inversa se denomina inversible, regular o no singular.

Por ejemplo, si

$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, entonces $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ pues

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hallar la inversa de una matriz, si existe, no es trivial. Hay varios métodos para ello: por adjunta, por sistemas de ecuaciones lineales (Gauss-Jordan), por diagonalización, por el teorema de Cayley-Hamilton. Iremos viendo cada método a lo largo de la materia, pero aún nos faltan algunos conceptos.

- ***<u>Propiedad conmutativa</u>:***

Como vimos a través de los ejemplos, la propiedad conmutativa NO se verifica, ya sea porque los productos son de distinto orden, o se puede hallar el producto $A.B$ pero el producto $B.A$ no se puede hallar, o bien, las dos matrices obtenidas son del mismo orden, pero son distintas. Entonces, en general $A.B\neq B.A$

<u>NOTA</u>: Siempre hay una excepción a la regla. En el caso de matrices cuadradas, puede suceder que encontremos matrices que verifiquen $A.B=B.A$.

Por ejemplo, si

$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}13 & -10\\ -6 & 1\end{pmatrix}$

$$A.B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}13 & -10\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -15\\ -9 & -22\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B.A=\begin{pmatrix}13 & -10\\ -6 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -15\\ -9 & -22\end{pmatrix}$$

En este caso, $A.B=B.A$. Cuando esto sucede decimos que las matrices A y B conmutan, o son matrices conmutables o son matrices permutables.

- ***Distributiva respecto a la adición:***
  Como en general las matrices no conmutan, o sea, en general $A.B\neq B.A$, es necesario enunciar la propiedad distributiva cuando la matriz que multiplica lo hace a izquierda o a derecha.
  $\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n};\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ y $\forall\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}:\ A.(B+C)=A.B+A.C$
  $\forall\ A\in\mathbb{R}^{p\times q};\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ y $\forall\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}:\ (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$

Estas propiedades responden a la axiomática del producto de matrices. Esta es una estructura algebraica muy particular, ya que la propiedad de composición interna, que es la que asegura la operación, no se cumple.

Potencia de una matriz:

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $k\in\mathbb{N}$, la matriz $A^k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene de multiplicar A por sí misma k veces.

$$A^k=\underbrace{A.A\ldots A}_{k\ \text{veces}}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10\\ 15 & 10\end{pmatrix}$$

Nota: Se define $A^0=I_n$

Hay otra serie de propiedades que nos permiten trabajar con operaciones entre matrices, ahora incluyendo el producto y la potencia, de manera más sencilla

Propiedades de las operaciones entre matrices: (demostradas en el apéndice)

1) $\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p},\ \forall\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}:\ A.B=A.C \quad \not\Rightarrow \quad B=C$
2) $\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}:\ A.B=N \quad \not\Rightarrow \quad A=N \vee B=N$
3) $\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}:\ (A.B)^t=B^t.A^t$
4) $\forall\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ A.A^t\in\mathbb{R}^{m\times m} \wedge A^t.A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices simétricas.
5) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices simétricas: $A.B$ es simétrica $\Leftrightarrow$ $A.B=B.A$
6) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices antisimétricas: $A.B$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A.B=-B.A$
7) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica $\Rightarrow$ A^2 es simétrica
8) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ A^k.A^h=A^{k+h}$
9) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ (A+B)^2=A^2+A.B+B.A+B^2$
10) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices permutables: $(A+B)^2=A^2+2\cdot A.B+B^2$
11) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ (A+B).(A-B)=A^2-A.B+B.A-B^2$

12) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices permutables: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

13) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: A es involutiva $\Leftrightarrow$ $(I-A)(I+A) = N$

14) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

15) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$

16) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

17) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si A y B son inversibles $\Rightarrow$ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

18) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si A y B son ortogonales $\Rightarrow$ $A.B$ es ortogonal.

19) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si A y B son idempotentes y permutables $\Rightarrow$ $A.B$ es idempotente.

20) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es idempotente y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal $\Rightarrow$ $B^{t}.A.B$ es idempotente.

21) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: si $A+B=I$ y $A.B=N$ $\Rightarrow$ A y B son idempotente.

DETERMINANTE

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se denomina determinante de A al número real que se obtiene realizando la suma algebraica de $n!$ términos, cada uno de los cuales se obtiene multiplicando n elementos pertenecientes a filas y columnas distintas.
Notación: Determinante de A: $Det(A)$ o bien $|A|$

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n!} sg(\sigma_i)\, a_{1\sigma_i(1)}.a_{2\sigma_i(2)}.a_{3\sigma_i(3)}.\cdots\cdots.a_{n\sigma_i(n)}$$

$n!$ se denomina n factorial o factorial de n y es el producto de los n primeros números naturales:
$n! = n.(n-1).(n-2).\cdots.3.2.1$

σ_i se denomina permutación, es una función $\sigma_i : \{1,2,3,\cdots n\} \to \{1,2,3,\cdots n\}$ biyectiva $\forall\ 1 \le i \le n!$.
Las permutaciones se las denomina pares o impares de acuerdo a si la cantidad de inversiones que se requieren para obtenerla, a partir de la identidad, es un número par o impar.
Una inversión es una permutación de sólo dos elementos, dejando fijos todos los demás.
$sg(\sigma_i)$ es el signo de la permutación que se antepone a cada producto.
$sg(\sigma_i) = +$ si la permutación es par.
$sg(\sigma_i) = -$ si la permutación es impar

Hallar el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a partir de la definición de determinante implica un claro conocimiento de todos los conceptos que forman parte dicha definición y aun así, el cálculo es muy engorroso.
Sólo lo haremos con matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Determinante de una matriz de orden 2:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces $Det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$ pues es la suma algebraica de $2! = 2$ términos cada uno de los cuales es el producto de 2 elementos pertenecientes a filas y columnas distintas.
El primer término $a_{11}.a_{22}$ es un “término positivo” pues la permutación es $\sigma_1 : \{1,2\} \to \{1,2\}$ definida por $\sigma_1(1) = 1$ y $\sigma_1(2) = 2$ es la identidad, no hay inversiones, o bien hay 0 inversiones, es par.
El segundo término $a_{12}.a_{21}$ es un “término negativo” pues la permutación es $\sigma_2 : \{1,2\} \to \{1,2\}$ definida por $\sigma_2(1) = 2$ y $\sigma_2(2) = 1$ es una inversión, es impar.

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A) = 4.1 - 3.2 = 4 - 6 = -2$

2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(B) = 3.(-4) - 2.5 = -12 - 10 = -22$

3) $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |C| = (-2).5 - 4.(-6) = -10 + 24 = 14$

4) $E=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{vmatrix}=(-2).3-6.(-1)=-6+6=0$

Cualquiera de las notaciones anteriores sirve para denotar al determinante.

Determinante de un matriz orden superior:

Considerando la dificultad que implica calcular un determinante a través de su definición, cuando la matriz sea de orden mayor a 2, lo calcularemos a través del método de Laplace o utilizaremos propiedades. Para poder trabajar con este método, necesitamos algunos conceptos previos:

Definición de menor complementario:

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, se denomina menor complementario del elemento a_{ij} de A al determinante de la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que se obtiene de eliminar fila i y columna j de A.
Notación: M_{ij}

Ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ entonces M_{23} es el determinante de la matriz de orden 2 que se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 3, es decir, eliminando la fila y la columna donde se halla el elemento a_{23}.

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ entonces $M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

Como $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces A tiene 9 menores complementarios, uno por cada elemento.
Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces A tiene n^2 menores complementarios, uno por cada elemento.

Ejemplo:

Calculemos todos los menores complementarios de la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$ $M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-16$ $M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-4$ $M_{21}=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-12$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -18 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

<u>Definición de cofactor (o adjunto)</u>:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se denomina cofactor (o adjunto) del elemento a_{ij} de A a su menor complementario si el elemento se encuentra en "posición" par, o a su opuesto si el elemento se encuentra en "posición impar". La posición la determina $i+j$.

Notación: $c_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$

Refiriéndonos a los ejemplos anteriores:

a) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow c_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{array}{lcl}
M_{11} = -2 & \Rightarrow & c_{11} = (-1)^2.(-2) = -2 \\
M_{12} = -16 & \Rightarrow & c_{12} = (-1)^3.(-16) = 16 \\
M_{13} = -4 & \Rightarrow & c_{13} = (-1)^4.(-4) = -4 \\
M_{21} = -12 & \Rightarrow & c_{21} = (-1)^3.(-12) = 12 \\
M_{22} = -18 & \Rightarrow & c_{22} = (-1)^4.(-18) = -18 \\
M_{23} = -24 & \Rightarrow & c_{23} = (-1)^5.(-24) = 24 \\
M_{31} = 16 & \Rightarrow & c_{31} = (-1)^4.16 = 16 \\
M_{32} = 11 & \Rightarrow & c_{32} = (-1)^5.11 = -11 \\
M_{33} = -7 & \Rightarrow & c_{33} = (-1)^6.(-7) = -7
\end{array}$$

Método de Laplace:

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el determinante de A es la suma de los productos de los elementos de *una* fila (o columna) cualquiera por sus correspondientes cofactores:

$Det(A) = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}.c_{i2} + \cdots + a_{in}.c_{in}$ si lo calculamos a través de la fila i

$Det(A) = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}.c_{2j} + \cdots + a_{nj}.c_{nj}$ si lo calculamos a través de la columna j

Aprovechando los ejemplos anteriores:

1) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow c_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ c_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\ \ c_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Si calculamos el determinante por fila 2, sería:

$Det(A) = a_{21}.c_{21} + a_{22}.c_{22} + a_{23}.c_{23}$

$Det(A) = a_{21}.\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}.\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{23}.\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right)$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

Si calculamos el determinante por fila 1, sería:

$Det(A) = a_{11}.c_{11} + a_{12}.c_{12} + a_{13}.c_{13}$ y como $c_{11} = -2$; $c_{12} = 16$ y $c_{13} = -4$

$Det(A) = 5.(-2) + 6.16 + 2.(-4) = -10 + 96 - 8 = 78$

Si calculamos el determinante por columna 2, sería:

$Det(A) = a_{12}.c_{12} + a_{22}.c_{22} + a_{32}.c_{32}$ y como $c_{12} = 16$; $c_{22} = -18$ y $c_{32} = -11$

$Det(A) = 6.16 + 1.(-18) + 0.(-11) = 96 + (-18) - 0 = 78$

Con el ejemplo vemos que podríamos elegir una fila o una columna cualquiera, multiplicar los elementos por los correspondientes cofactores y sumarlos para hallar el determinante. De esta manera, se va a elegir la fila o columna y luego se buscarán los cofactores que le corresponden.
Si bien cualquier fila o columna sirve, como los cofactores que vamos a calcular dependen de los elementos de esta fila o columna, conviene buscar la que tenga más ceros, y de esa manera, hallamos menos cofactores.

3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, como la tercera columna de A tiene dos ceros, es la que conviene elegir para calcular del determinante:

$Det(A) = a_{13}.c_{13} + a_{23}.c_{23} + a_{33}.c_{33} + a_{43}.c_{43} \Rightarrow Det(A) = 2.c_{13} + 0.c_{23} + 0.c_{33} + 1.c_{43}$.

Sólo es necesario buscar c_{13} y c_{43} pues c_{23} y c_{33} quedan multiplicados por cero y esos términos desaparecerán.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{0} & 4 \\ -5 & 3 & \boxed{0} & -2 \\ 1 & 2 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad c_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \wedge \quad c_{43}=(-1)^{4+3}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ahora debemos calcular dos determinantes de orden 3:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ no tiene ceros, es indistinta la elección de fila o columna. Tomemos la fila 3, entonces:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1.1.(-16)+2.(-1).14+3.1.19$$

$$=-16+(-28)+57=13 \quad \Rightarrow \quad c_{13}=(-1)^{1+3}.13=13$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ tiene un cero, conviene elegir la primera fila o la segunda columna. Tomemos la columna 2, entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \\ 3 & \boxed{2} & 4 \\ -5 & \boxed{3} & -2 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2.1.(-7)+3.(-1).7$$

$$=-14+(-21)=-35 \quad \Rightarrow \quad c_{43}=(-1)^{4+3}.(-35)=35$$

Por lo tanto: $Det(A)=2.13+1.35=26+35=61$

Notar la importancia de haber elegido la columna 3. Si hubiésemos, por ejemplo, elegido la fila 1, deberíamos calcular tres determinantes de orden 3 y si hubiésemos elegido, por ejemplo, la cuarta columna, deberíamos calcular cuatro determinantes de orden 3. Al elegir la columna 3, hemos realizado la menor cantidad posible de cálculos, sólo dos determinantes de orden 3.

A medida que el orden de la matriz es mayor, el cálculo se dificulta. Supongamos que tenemos una matriz de orden 5, que no tiene ceros. Calcular el determinante requiere calcular cinco determinantes de orden 4 y para calcular cada uno de estos, se tiene que calcular 4 determinantes de orden 3, es decir, debemos calcular 20 determinantes de orden 3.
Para evitar semejante cálculo, es conveniente conocer algunas propiedades.

Propiedades de los determinantes: (demostradas en el apéndice)

1) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene una fila (o una columna) de ceros, entonces $Det(A)=0$.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & \boxed{0} & 8 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si tomamos la cuarta columna para calcular el determinante, tenemos:

$$Det(A)=0.c_{14}+0.c_{24}+0.c_{34}+0.c_{44}+0.c_{54} \quad \Rightarrow \quad Det(A)=0$$

2) Si $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz que se obtiene de permutar *dos* filas (o *dos* columnas) de una matriz A, entonces $Det(A')=-Det(A)$.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$Det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}=2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}=2.1.(5-32)=-54$$

Supongamos que $A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ A' se obtuvo permutando las columnas 1 y 2 de A

$$Det(A')=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}=2.(-1).(5-32)=54$$

$$Det(A')=-Det(A)$$

3) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene dos filas (o columnas) idénticas, entonces $Det(A)=0$.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, la columna 1 es igual a la columna 3:

$$Det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}=2.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}+(-3).(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}+4.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=2.1.(-24-16)+(-3).(-1).(16-20)+4.1.(8-(-15)) \\ &=2.(-40)+3.(-4)+4.(23) \\ &=-80-12+92 \\ &=0 \end{aligned}$$

4) Si $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz que se obtiene de multiplicar *una* fila (o *una* columna) por un escalar $\lambda \neq 0$, entonces $Det(A') = \lambda.Det(A)$.

Ejemplos:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $Det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=10-12=-2$

Supongamos que $A'=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$, obtenida multiplicando por 3 la segunda columna de A

$Det(A')=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}=30-36=-6$, es decir $Det(A')=3.Det(A)$

Esta propiedad es muy útil, pues en el caso de tener alguna fila o columna formada por múltiplos de un mismo número, podríamos "sacar" este número de la matriz y trabajar con números menores:

Sea $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, la primera fila es múltiplo de 2, la segunda fila es múltiplo de 3:

$Det(B)=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}=2.3.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=6.(-5)=-30$

5) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Det(\lambda.A)=\lambda^n.Det(A)$ (n es el orden de A)

Ejemplos:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $Det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-(-6)=10$

Consideremos a la matriz $3.A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$,

$Det(3.A)=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}=36-(-54)=90$, es decir $Det(3.A)=3^2.Det(A)=9.10=90$

$\begin{cases} \lambda = 3 \\ \text{Orden de } A \text{ es } 2 \end{cases}$

Sea $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $Det(B)=2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2.(-3-(-4))=2$

Consideremos a la matriz $-2.B=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$,

$Det(-2.B)=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-4.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-4.(-12-(-16))=-16$,

es decir $Det(-2.B)=(-2)^3.Det(B)=-8.2=-16$

$\begin{cases} \lambda = -2 \\ \text{Orden de } B \text{ es } 3 \end{cases}$

6) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, entonces el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal: $Det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn}$.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-3).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -6.(-4-0) = 24$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-3)1.(-4) = 24$$

7) $Det(I) = 1$

Ejemplo:

$$Det(I_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1.1 = 1$$

8) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular (superior o inferior), entonces el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal: $Det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn}$.

Ejemplos:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-2).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-4).(-3-0) = 12$$

$$Det(A) = 2.(-2).3.(-1) = 12$$

Sea $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$Det(B)=\begin{vmatrix} \boxed{5 & 0 & 0 & 0} \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}=5.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} \boxed{-2 & 0 & 0} \\ 9 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}=5.(-2).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=(-10).(3-0)=-30$$

$$Det(B)=5.(-2).1.3=-30$$

9) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tiene dos filas (o columnas) que son múltiplos, entonces $Det(A)=0$.

Ejemplos:

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$$Det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix}=\underbrace{(-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Por propiedad (4):} \\ F_3 \text{ es múltiplo de -2}}}=(-2).0=0$$

Por propiedad (3): $F_3=F_1$

Si $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

$$Det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \end{vmatrix}=\underbrace{3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Por propiedad (4):} \\ C_2 \text{ es múltiplo de 3}}}=3.0=0$$

Por propiedad (3): $C_2=C_3$

10) Si $A'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz que se obtiene de sumarle a una fila (o columna) un múltiplo de otra fila (o columna), entonces $Det(A')=Det(A)$.

Ejemplos:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $Det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-(-3)=7$

Supongamos que A' se obtiene de sumarle a la fila 2, 5 veces la fila 1 de A: F_2+5F_1, entonces:

$A'=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$ entonces $Det(A')=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix}=-6-(-13)=7$

Supongamos que A'' se obtiene de sumarle a la columna 1, -2 veces la columna 2 de A: $C_1+(-2)C_2$, entonces: $A''=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $Det(A'')=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8-1=7$

Esta propiedad es muy importante, pues se utiliza para "poner muchos ceros" en la matriz y así facilitar el cálculo del determinante, sobre todo cuando las matrices son de orden grande:

Sea $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y calculemos el determinante de dos formas:

Por el método de Laplace:

$$Det(B)=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&5&3\\4&2&2\end{vmatrix}=1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}5&3\\2&2\end{vmatrix}+3.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix}+2.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}2&5\\4&2\end{vmatrix}$$

$$=1.(10-6)-3.(4-12)+2.(4-20)$$

$$=1.4-3.(-8)+2.(-16)$$

$$=4+24+(-32)$$

$$Det(B)=-4$$

Utilizando la propiedad:

$$Det(B)=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&5&3\\4&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-1&-1\\0&-10&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-1&-1\\0&0&4\end{vmatrix}=1.(-1).4=-4$$

$F_2'=F_2+(-2)F_1$ $\quad F_3''=F_3'+(-10)F_2'$ $\quad$ Matriz triangular

$F_3'=F_3+(-4)F_1$

11) Si $A'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz equivalente con A que se obtiene mediante el método de Gauss-Jordan, entonces $Det(A')=Det(A)$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}2&3&-1&0&5\\6&1&3&1&4\\2&-1&-3&0&2\\6&4&1&-6&0\\0&4&-2&-3&1\end{pmatrix}$, entonces

$$Det(A)=\begin{vmatrix}2&3&-1&0&5\\6&1&3&1&4\\2&-1&-3&0&2\\6&4&1&-6&0\\0&4&-2&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&-1&0&5\\6&1&3&1&4\\2&-1&-3&0&2\\42&10&19&0&24\\18&7&7&0&13\end{vmatrix}=\underbrace{1.(-1)^{2+4}}_{1}.\begin{vmatrix}2&3&-1&5\\2&-1&-3&2\\42&10&19&24\\18&7&7&13\end{vmatrix}$$

Gauss-Jordan $\quad$ Método de Laplace

$$Det(A)=1.\begin{vmatrix}2&3&-1&5\\2&-1&-3&2\\42&10&19&24\\18&7&7&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&-1&5\\-4&-10&0&-13\\80&67&0&119\\32&28&0&48\end{vmatrix}=\underbrace{(-1).(-1)^{1+3}}_{-1}\begin{vmatrix}-4&-10&-13\\80&67&119\\32&28&48\end{vmatrix}$$

$$Det(A)=(-1).\begin{vmatrix}-4&-10&-13\\80&67&119\\32&28&48\end{vmatrix}=(-1).4.\begin{vmatrix}-4&-10&-13\\80&67&119\\8&7&12\end{vmatrix}=\underbrace{(-4).(-4)}_{16}\begin{vmatrix}1&-10&-13\\-20&67&119\\-2&7&12\end{vmatrix}$$

F_3 es múltiplo de 4 $\quad$ C_1 es múltiplo de (-4) $\quad$ Gauss-Jordan

$$Det(A)=16.\begin{vmatrix}1&-10&-13\\0&-133&-141\\0&-13&-14\end{vmatrix}=16.1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-133&-141\\-13&-14\end{vmatrix}=16.(1862-1833)=16.29=464$$

Método de Laplace

Si calculásemos directamente el determinante, por columna 4, lo reducimos a tres determinantes de orden 4; cada uno de los tres, se reduce a cuatro determinantes de orden 3. Por el método de Laplace, deberíamos calcular doce determinantes de orden 3, el cálculo sería muy tedioso.

12) $Det\left(A^t\right) = Det(A)$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{2 \quad 0 \quad 0} \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2).(6-(-1)) = -14$$

$$Det\left(A^t\right) = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 6 \\ 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & \boxed{0} & 3 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2).(6-(-1)) = -14$$

13) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $Det(A.B) = Det(A).Det(B)$.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A) = 4-(-6) = 10 \\ \text{Sea } B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(B) = -12-6 = -18 \end{array}\right\} Det(A).Det(B) = 10.(-18) = -180$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A.B) = 2-182 = -180$$

14) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $Det\left(A^k\right) = \left[Det(A)\right]^k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A) = 24-18 = 6 \quad \Big\} \ Det\left(A^3\right) = 6^3 = 216$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 60 & 54 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 316 & 282 \\ 564 & 504 \end{pmatrix}$$

$$Det\left(A^3\right) = 316.504 - 564.282 = 159264 - 159048 = 216$$

15) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$.

Ejemplos:

Cuando vimos la definición de inversa, el ejemplo que trabajamos fue:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, veamos que el $Det(A) \neq 0$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 5.1 = 6-5 = 1 \neq 0$$

Pero A es la inversa de A^{-1}, por definición de inversa, entonces $Det\left(A^{-1}\right) \neq 0$ también.

$$Det\left(A^{-1}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=3.2-(-1).(-5)=6-5=1\neq 0$$

Sea $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $B^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (verifica que $B.B^{-1}=I_3$)

$$Det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 5} \end{vmatrix}=5.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=5.(4-6)=5.(-2)=-10\neq 0$$

$$Det\left(B^{-1}\right)=\begin{vmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad \frac{1}{5}} \end{vmatrix}=\frac{1}{5}.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{5}.\left(-2.\left(-\frac{1}{2}\right)-1.\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{5}.\left(1-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{10}\neq 0$$

16) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Rightarrow$ $Det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{Det(A)}$.

De los ejemplos utilizados en la propiedad (15)

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} Det(A)=1 \\ Det\left(A^{-1}\right)=1 \end{array}\right\}\quad Det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{1}=\frac{1}{Det(A)}$$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $B^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} Det(B)=-10 \\ Det\left(B^{-1}\right)=-\frac{1}{10} \end{array}\right\} Det\left(B^{-1}\right)=-\frac{1}{10}=\frac{1}{-10}=\frac{1}{Det(B)}$$

17) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal $\Rightarrow$ $Det(A)=1 \vee Det(A)=-1$.

Calculemos el determinante de los ejemplos de matrices ortogonales vistos antes:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Det(A)=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}=1.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1.1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1.1.(0-1)=1$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$Det(B)=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=1$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$Det(C)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}+\frac{2}{3}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}+\frac{2}{3}.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)\right)-\frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{3}-\frac{2}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right)\right)+\frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\right)-\frac{2}{3}.\left(\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\right)+\frac{2}{3}.\left(-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{9}\right)-\frac{2}{3}.\left(\frac{6}{9}\right)+\frac{2}{3}.\left(-\frac{6}{9}\right)$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=-1$$

18) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es involutiva $\Rightarrow$ $Det(A)=1 \vee Det(A)=-1$.

Calculemos el determinante de los ejemplos de matrices involutivas vistos antes:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$Det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=1.(-1).(-1).(-1)=-1$$ pues es matriz diagonal.

$$B=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$Det(B)=\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=2.(-2)-3.(-1)=-4+3=-1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$Det(C)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=1.1.(-1)=-1$$ pues es matriz triangular inferior.

19) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es idempotente $\Rightarrow$ $Det(A)=1 \vee Det(A)=0$.
Calculemos el determinante de los ejemplos de matrices idempotentes vistos antes:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$Det(A)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$B=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\5&4&-1\\-5&-3&2\end{pmatrix}$$

$$Det(B)=\begin{vmatrix}\boxed{-4\quad -3\quad 1}\\5&4&-1\\-5&-3&2\end{vmatrix}=(-4).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}4&-1\\-3&2\end{vmatrix}+(-3).(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}5&-1\\-5&2\end{vmatrix}+1.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}5&4\\-5&-3\end{vmatrix}$$

$$=(-4).(8-3)+3.(10-5)+1.(-15+20)$$

$$=(-4).5+3.5+1.5$$

$$=-20+15+5=0$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Det(C)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.1.1.1=1$$

Los determinantes tienen muchas más propiedades, puesto que la función $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ definida como $F(A)=Det(A)$ es una función multilineal, pero dichas propiedades no son necesarias para esta asignatura, por eso no fueron enunciadas.

NOTA:
No hay propiedades del determinante respecto a la suma de matrices, es decir:
Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $Det(A+B)\neq Det(A)+Det(B)$.

Contraejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad Det(A)=\begin{vmatrix}2&1\\-2&3\end{vmatrix}=6-(-2)=8$$

$$B=\begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad Det(B)=\begin{vmatrix}3&5\\1&4\end{vmatrix}=12-5=7$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\-1&7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad Det(A+B)=\begin{vmatrix}5&6\\-1&7\end{vmatrix}=35-(-6)=41$$

$$\left.\begin{array}{l}Det(A+B)=41\\ Det(A)+Det(B)=8+7=15\end{array}\right\}Det(A+B)\neq Det(A)+Det(B)$$

Matriz de cofactores:

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, se denomina matriz de cofactores de A a la matriz que se obtiene de reemplazar cada elemento de A por su respectivo cofactor. Notación: $\mathcal{C}(A)$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}5&6&2\\2&1&3\\4&0&-2\end{pmatrix}$, la matriz a la cual le calculamos todos los cofactores anteriormente (pág. 26), entonces:

$$\mathcal{C}(A)=\begin{pmatrix}-2&16&-4\\12&-18&24\\16&-11&-7\end{pmatrix}$$

Matriz adjunta:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se denomina matriz adjunta de A a la matriz traspuesta de la matriz de cofactores de A. Notación: $\mathcal{Adj}(A) = \left(\mathcal{C}(A)\right)^t$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, la matriz a la cual le calculamos todos los cofactores anteriormente, y su matriz de cofactores, entonces:

$$\mathcal{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 16 \\ 16 & -18 & -11 \\ -4 & 24 & -7 \end{pmatrix}$$

Propiedad:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se verifica "$A.\mathcal{Adj}(A) = \mathcal{Adj}(A).A = Det(A)\cdot I_n$"

Ejemplos:

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, como $\mathcal{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 16 \\ 16 & -18 & -11 \\ -4 & 24 & -7 \end{pmatrix}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} A.\mathcal{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 12 & 16 \\ 16 & -18 & -11 \\ -4 & 24 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{pmatrix} = 78\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{Adj}(A).A = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 16 \\ 16 & -18 & -11 \\ -4 & 24 & -7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{pmatrix} = 78\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} = Det(A)\cdot I_3$$

Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11} = 3 & \Rightarrow & c_{11} = (-1)^2.3 = 3 \\ M_{12} = 1 & \Rightarrow & c_{12} = (-1)^3.1 = -1 \\ M_{21} = -2 & \Rightarrow & c_{21} = (-1)^3.(-2) = 2 \\ M_{22} = 2 & \Rightarrow & c_{22} = (-1)^4.2 = 2 \end{array}\right\} \quad \mathcal{C}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} B.\mathcal{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{Adj}(B).B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} = Det(B)\cdot I_2$$

Sea $C=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=3 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.3=3 \\ M_{12}=-6 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.(-6)=6 \\ M_{21}=-2 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.(-2)=2 \\ M_{22}=4 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.4=4 \end{array}\right\} \mathcal{C}(C)=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(C)=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} C.\mathcal{Adj}(C)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{Adj}(C).C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} =Det(C)\cdot I_2$$

Matriz inversa, cálculo por adjunta

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, como analizamos en las propiedades del producto de matrices:
$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ existe una matriz a la que notaremos $A^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ que verifique $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$. Si A^{-1} existe, es única por definición de elemento inverso.

Por otra parte, por la propiedad (15) de determinantes, concluimos que:
$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ $Det(A)\neq 0$

Y teniendo en cuenta la propiedad de matriz adjunta:
$A.\mathcal{Adj}(A)=\mathcal{Adj}(A).A=Det(A)\cdot I_n$

Como $Det(A)\neq 0$ para que la matriz A tenga inversa, entonces, en la última igualdad multipliquemos miembro a miembro por $\dfrac{1}{Det(A)}$:

$\dfrac{1}{Det(A)}\cdot A.\mathcal{Adj}(A)=\dfrac{1}{Det(A)}\cdot\mathcal{Adj}(A).A=\dfrac{1}{\cancel{Det(A)}}.\cancel{Det(A)}\cdot I_n$. Como $\dfrac{1}{Det(A)}$ es un escalar, entonces en el primer miembro hacemos propiedad conmutativa y asociamos:

$A.\underbrace{\left[\dfrac{1}{Det(A)}.\mathcal{Adj}(A)\right]}_{A^{-1}}=\underbrace{\left[\dfrac{1}{Det(A)}.\mathcal{Adj}(A)\right]}_{A^{-1}}.A=I_n$ y como si A^{-1} existe, es única, entonces:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{Det(A)}.\mathcal{Adj}(A)}$$

Ejemplos:
Aprovechando los ejemplos anteriores, ya que tenemos las adjuntas:

Sea $A=\begin{pmatrix}5&6&2\\2&1&3\\4&0&-2\end{pmatrix}$, como $\mathcal{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-2&12&16\\16&-18&-11\\-4&24&-7\end{pmatrix}$ y $Det(A)=78$, entonces

$$A^{-1}=\frac{1}{78}\cdot\begin{pmatrix}-2&12&16\\16&-18&-11\\-4&24&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{78}&\frac{12}{78}&\frac{16}{78}\\\frac{16}{78}&\frac{-18}{78}&\frac{-11}{78}\\\frac{-4}{78}&\frac{24}{78}&\frac{-7}{78}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{39}&\frac{2}{13}&\frac{8}{39}\\\frac{8}{39}&-\frac{3}{13}&-\frac{11}{78}\\-\frac{2}{39}&\frac{4}{13}&-\frac{7}{78}\end{pmatrix}$$

Sea $B=\begin{pmatrix}2&-2\\1&3\end{pmatrix}$, como $\mathcal{Adj}(B)=\begin{pmatrix}3&2\\-1&2\end{pmatrix}$ y $Det(B)=8$, entonces

$$B^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}&\frac{2}{8}\\\frac{-1}{8}&\frac{2}{8}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Sea $C=\begin{pmatrix}4&-2\\-6&3\end{pmatrix}$, como $\mathcal{Adj}(C)=\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}$, pero $Det(C)=0$, entonces C no tiene inversa.

Para determinar si una matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tiene o no inversa, primero buscamos su determinante. Si $Det(A)\neq 0$, entonces buscamos la $\mathcal{Adj}(A)$ y la multiplicamos por el inverso del determinante para obtener su inversa.

Propiedades de la matriz inversa:

Estas propiedades ya las vimos cuando vimos producto de matrices, las enunciamos nuevamente para que queden dentro de este tema al buscarlas:

1) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{lll}M_{11}=2&\Rightarrow&c_{11}=(-1)^2.2=2\\M_{12}=4&\Rightarrow&c_{12}=(-1)^3.4=-4\\M_{21}=1&\Rightarrow&c_{21}=(-1)^3.1=-1\\M_{22}=3&\Rightarrow&c_{22}=(-1)^4.3=3\end{array}\right\}\ \mathcal{C}(A)=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathcal{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&3\end{pmatrix}$$

$$Det(A)=2 \text{ entonces: } A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Considerando ahora $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=\frac{3}{2} & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\\ M_{12}=-2 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.(-2)=2\\ M_{21}=-\frac{1}{2} & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\\ M_{22}=1 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.1=1 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A^{-1})=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A^{-1})=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$Det(A^{-1})=\frac{1}{2} \text{ entonces: } (A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=A$$

2) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=3 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.3=3\\ M_{12}=-1 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.(-1)=1\\ M_{21}=5 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.5=-5\\ M_{22}=2 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.2=2 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A)=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$Det(A)=11 \text{ entonces: } A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & -\frac{5}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^t=\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}$$

Sea $A^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=3 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.3=3\\ M_{12}=5 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.5=-5\\ M_{21}=-1 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.(-1)=1\\ M_{22}=2 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.2=2 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A^t)=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$Det\left(A^t\right)=11 \text{ entonces: } \left(A^t\right)^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}=\left(A^{-1}\right)^t$$

3) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$: si A es inversible $\Rightarrow$ $(\lambda\cdot A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, y sea $\lambda=3$ entonces $3\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$

Para la inversa de $3\cdot A$

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=15 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.15=15 \\ M_{12}=6 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.6=-6 \\ M_{21}=12 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.12=-12 \\ M_{22}=6 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.6=6 \end{array}\right\} \mathcal{C}(3\cdot A)=\begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(3\cdot A)=\begin{pmatrix} 15 & -12 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Det(3\cdot A)=18 \text{ entonces: } (3\cdot A)^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -12 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (3\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Para la inversa de A:

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=5 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.5=5 \\ M_{12}=2 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.2=-2 \\ M_{21}=4 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.4=-4 \\ M_{22}=2 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.2=2 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A)=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Det(A)=2 \text{ entonces: } A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=(3\cdot A)^{-1}$$

4) Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$: si A y B son inversibles $\Rightarrow$ $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

Ejemplo:

Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A.B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$

Para la inversa de $A.B$

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=14 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.14=14 \\ M_{12}=2 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.2=-2 \\ M_{21}=9 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.9=-9 \\ M_{22}=2 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.2=2 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A.B)=\begin{pmatrix}14 & -2\\ -9 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A.B)=\begin{pmatrix}14 & -9\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$Det(A\cdot B)=10 \text{ entonces: } (A.B)^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}14 & -9\\ -2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow (A.B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & -\frac{9}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Para la inversa de A

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=4 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.4=4 \\ M_{12}=-2 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.(-2)=2 \\ M_{21}=-1 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.(-1)=1 \\ M_{22}=3 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.3=3 \end{array}\right\} \mathcal{C}(A)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$Det(A)=10 \text{ entonces: } A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

Para la inversa de B

$$\left.\begin{array}{lll} M_{11}=6 & \Rightarrow & c_{11}=(-1)^2.6=6 \\ M_{12}=1 & \Rightarrow & c_{12}=(-1)^3.1=-1 \\ M_{21}=5 & \Rightarrow & c_{21}=(-1)^3.5=-5 \\ M_{22}=1 & \Rightarrow & c_{22}=(-1)^4.1=1 \end{array}\right\} \mathcal{C}(B)=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{Adj}(B)=\begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$Det(B)=1 \text{ entonces: } B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & -\frac{9}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=(A.B)^{-1}$$

Calcular la matriz inversa de una matriz A por medio de la matriz adjunta puede ser algo trabajoso cuando la matriz es de orden mayor:

Si $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ se requiere calcular nueve determinantes de orden 2.

Si $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ se requiere calcular dieciséis determinantes de orden 3.

Si $A\in\mathbb{R}^{5\times 5}$ se requiere calcular veinticinco determinantes de orden 4…

Hay otros métodos que nos permiten calcular inversa de una matriz de una manera menos laboriosa, que iremos conociendo a medida que avancemos con los temas.

Análisis del rango de una matriz aplicando determinantes:

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, toda matriz que se deduce de A por supresión de filas y/o columnas (sin cambiar el orden de los elementos que no se suprimen) se dice extraída de A.
El rango de la matriz A es igual al máximo orden de las matrices cuadradas inversibles extraídas de A y como una matriz es inversible si su determinante es no nulo, entonces el rango de una A es igual al máximo orden de las matrices cuadradas cuyo determinante es no nulo.

Ejemplos:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.(-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-3)+1.(15)+5.(6) = -6+15+30 = 39$$

Como $Det(A) \neq 0$ y $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces $Rg(A) = 3$. Como vimos en las propiedades del producto de matrices, A tiene rango máximo, es inversible.

Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

$$Det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 2.(-1)^2.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 1.(-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 4.(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-6)-1.(0)+4.(3) = -12-0+12 = 0$$

Como $Det(B) = 0$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces $Rg(B) \neq 3$, $Rg(B) < 3$. Como vimos en las propiedades del producto de matrices, B no tiene rango máximo, no es inversible.
Tomemos matrices de orden 2:

Si eliminamos primera fila y segunda columna: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos primera fila y primera columna: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -6$, como es no nulo, $Rg(B) = 2$

Al encontrar una matriz de determinante no nulo, ya podemos dejar de buscar determinantes, y afirmar cuál es su rango.

Sea $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

$$Det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 2.(-1)^2.\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^3.\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + 4.(-1)^4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(0) + 1.(0) + 4.(0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Como $Det(C) = 0$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces $Rg(C) \neq 3$, $Rg(C) < 3$. Como vimos en las propiedades del producto de matrices, C no tiene rango máximo, no es inversible.

Tomemos matrices de orden 2:

Si eliminamos primera fila y primera columna: $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos primera fila y segunda columna: $\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$, no nos da información.

Si eliminamos primera fila y tercera columna: $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$, no nos da información.

Si eliminamos segunda fila y primera columna: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos segunda fila y segunda columna: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos segunda fila y tercera columna: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos tercera fila y primera columna: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos tercera fila y segunda columna: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos tercera fila y tercera columna: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Estas son todas las matrices de orden 2 que se pueden extraer de C, por lo tanto $Rg(C) < 2$ y como la matriz no es nula, debe ser $Rg(C) = 1$

Tomemos matrices de orden 1:

Si eliminamos primera y segunda fila, primera y segunda columna: $|12| = 12$

Al encontrar una matriz de determinante no nulo, en este caso de orden 1, ya podemos dejar de buscar determinantes, y afirmar cuál es su rango: $Rg(C) = 1$

Sea $E=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$

$$Det(E)=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \end{vmatrix}=5.(-1)^2.\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}+2.(-1)^3.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}+(-3).(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=5.(0)-2.(0)+(-3).(0)=0-0+0=0$$

Como $Det(E)=0$ y $E\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces $Rg(E)\neq 3$, $Rg(E)<3$. Como vimos en las propiedades del producto de matrices, E no tiene rango máximo, no es inversible.

Tomemos matrices de orden 2:

Si eliminamos primera fila y primera columna: $\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}=0$ no nos da información.

Si eliminamos primera fila y segunda columna: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}=0$, no nos da información.

Si eliminamos primera fila y tercera columna: $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}=0$, no nos da información.

Si eliminamos segunda fila y primera columna: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}=15$

Encontramos una matriz de orden 2 que se pueden extraer de E cuyo determinante es no nulo, por lo tanto $Rg(E)=2$

Sea $F=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$F\in\mathbb{R}^{4\times 3}$, como no es cuadrada, no tiene sentido calcular determinante de F, pero cuando definimos rango vimos que el rango de una matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ siempre es menor o igual al mínimo número de filas y columnas que tiene A: $Rg(A)\leq mín\{m;n\}$, por lo tanto $Rg(F)\leq mín\{3;4\}$, es decir, $Rg(F)\leq 3$

Tomemos matrices de orden 3:

Si eliminamos primera fila: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0$ (la segunda fila es el doble de la primera), no nos da información.

Si eliminamos segunda fila: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0$ (la tercera fila es menos tres medios de la segunda), no nos da información.

Si eliminamos tercera fila: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$, (la tercera fila es menos tres veces la segunda), no nos da información.

Si eliminamos cuarta fila: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, (la tercera fila es el doble de la segunda), no nos da información.

Estas son todas las matrices de orden 3 que se pueden extraer de F, por lo tanto $Rg(F) \neq 3$.

Tomemos matrices de orden 2:

Si eliminamos primera y segunda filas y primera columna: $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$ no nos da información.

Si eliminamos tercera y cuarta filas y primera columna: $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$.

Encontramos una matriz de orden 2 que se pueden extraer de F cuyo determinante es no nulo, por lo tanto $Rg(F) = 2$

Antes de hallar una matriz de orden 2 con determinante no nulo, podríamos haber calculado muchos más determinantes de orden 2, lo que nos muestra que este método es eficiente sólo cuando rápidamente se encuentra un determinante no nulo, lo cual no se puede predecir; no siempre es conveniente.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Introducción:

En Álgebra se trabaja con una combinación de letras y números para representar distintas situaciones. La parte de las expresiones que tienen letras se la conoce como *parte literaria*.
Estas letras de una expresión reciben distintos nombres de acuerdo a qué es lo que se pretende representar con ellas.

Variable: Es el caso de trabajar con funciones, cuando se pretende que la/s letra/s vaya/n variando (variable/s independiente/s) para obtener el valor de otra variable (variable dependiente), es decir, representa una relación entre conjuntos, por ejemplo: $z = f(x, y)$ donde z representa el precio de un bien que depende de x, la cantidad encargada de este bien por una persona, e y, índice de inflación esperado al momento de la adquisición del bien.

Indeterminada: Es el caso de expresiones algebraicas en las cuales cada letra representa un *número generalizado* con los cuales queremos hacer operaciones genéricas, sin importar cuál es el número, por ejemplo: polinomios.

Incógnita: Es el caso de las ecuaciones o inecuaciones. En este caso, si bien es un valor desconocido en principio, sólo es necesario resolver la ecuación para conocerlo; el símbolo igual representa una restricción, hay una igualdad cierta, verdadera, para algunos valores de la/s letra/s; el igual representa un equilibrio que sólo se mantiene para determinado/s valor/es de la/s letra/s.

Una ecuación se dice lineal (o de grado 1) cuando relaciona números conocidos con números desconocidos, las incógnitas, y que se pretende conocer. Estas incógnitas aparecen solamente a la primera potencia y nunca multiplicadas entre sí.

Ejemplos:

1)	$2x+7=-1$	es una ecuación lineal con una incógnita.
2)	$4x-2=3(x+1)$	es una ecuación lineal con una incógnita.
3)	$5x+8y=2x+4$	es una ecuación lineal con dos incógnitas.
4)	$5x^2-4=41$	no es una ecuación lineal, es de segundo grado, con una incógnita.
5)	$\frac{6x+12}{x+4}=2x$	no es una ecuación lineal, es una ecuación racional con una incógnita.
6)	$x.y=5$	no es una ecuación lineal, es de segundo grado, con dos incógnitas.
7)	$12x-3xy^2=0$	no es una ecuación lineal, es de tercer grado, con dos incógnitas.
8)	$\begin{cases} 3x+6=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$	Son dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se deben verificar al mismo tiempo.
9)	$5x+8-2=2x+6+3x$	es una ecuación lineal con una incógnita.
10)	$2x+7+2x=5+4x$	es una ecuación lineal con una incógnita.

Aquellos números que verifican la ecuación se dice que son solución de la ecuación:

1) $2x+7=-1$

$2x+7-7=-1-7$ Restando 7 miembro a miembro

$2x+0=-8$ Operando

$2x=-8$ 0 es elemento neutro de la adición en $\mathbb{R}$

$\frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}x=\frac{1}{\cancel{2}}.\begin{pmatrix}-4\\-\cancel{8}\end{pmatrix}$ Multiplicando $\frac{1}{2}$ miembro a miembro

$1.x=-4$ Operando

$x=-4$ 1 es elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{R}$

Solución: $S=\{-4\}$ Hay una solución

2) $4x-2=3(x+1)$

$4x-2=3x+3$ Propiedad distributiva en el segundo miembro

$4x-3x=3+2$ Restando $3x$ y sumando 2 miembro a miembro

$x=5$ Operando

Solución: $S=\{5\}$ Hay una solución

3) $5x+8y=2x+4$

$8y=2x-5x+4$ Restando $5x$ miembro a miembro

$8y=-3x+4$ Operando

$y=\frac{1}{8}.(-3x+4)$ Multiplicando $\frac{1}{8}$ miembro a miembro

$y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}$ Propiedad distributiva en el segundo miembro

Solución: $S=\left\{\left(x;-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\right):x\in\mathbb{R}\right\}$. Hay infinitas soluciones; para cada valor de x elegido arbitrariamente, siempre $y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}$

4) $5x^2-4=41$

$5x^2=41+4$ Sumando 4 miembro a miembro

$5x^2=45$ Operando

$x^2=\frac{1}{\cancel{5}}.\cancel{45}^{\,9}$ Multiplicando $\frac{1}{5}$ miembro a miembro

$|x|=\sqrt{9}$ Calculando raíz cuadrada miembro a miembro

$|x|=3$

$x=3 \quad \vee \quad x=-3$

Solución: $S=\{3;-3\}$ Hay dos soluciones.

5) $\dfrac{6x+12}{x+4}=2x$

$6x+12=2x.(x+4)$ Multiplicando por $(x+4)$ miembro a miembro

$6x+12=2x^2+8x$ Propiedad distributiva en el segundo miembro

$0=2x^2+8x-6x-12$ Restando miembro a miembro $6x+12$

$0=2x^2+2x-12$ Operando: Es una ecuación de grado 2 en una variable, conocida como ecuación cuadrática: utilizando la fórmula de Bhaskara, obtengo las soluciones.

$x=2 \quad \vee \quad x=-3$

Solución: $S=\{2;-3\}$ Hay dos soluciones.

6) $x.y=5$

$\dfrac{1}{\cancel{x}}.\cancel{x}.y=\dfrac{1}{x}.5$ $x\neq 0 \quad \wedge \quad y\neq 0$ pues $x.y\neq 0$, entonces multiplico miembro a miembro por $\dfrac{1}{x}$

Operando

$y=\dfrac{5}{x}$

Solución: $S=\left\{\left(x;\dfrac{5}{x}\right):x\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$. Hay infinitas soluciones; para cada valor de $x\neq 0$ elegido arbitrariamente, siempre $y=\dfrac{5}{x}$

7) $12x-3xy^2=0$ Sacando x factor común

$x.(12-3y^2)=0$ Un producto es nulo sólo si uno de los factores vale 0

$12-3y^2=0 \quad \vee \quad x=0$

$12=3y^2$ Despejando la cuadrática cuya incógnita es y

$4=y^2$

$2=|y|$

$y=2 \quad \vee \quad y=-2$

Solución: $S=\{(0;y);(x;-2);(x;2):x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}\}$. Hay infinitas soluciones, ahora con tres formas distintas: si $x=0$, $y\in\mathbb{R}$; si $y=2$, $x\in\mathbb{R}$; o si $y=-2$, $x\in\mathbb{R}$

8) $\begin{cases}3x+6=0\\ x+2y=0\end{cases}$

$$\left.\begin{aligned}3x+6&=0\\ 3x&=-6\\ x&=-2\end{aligned}\right\}$$ Resolvemos la primera ecuación que sólo tiene incógnita x

$$\left.\begin{aligned}x+2y&=0\\ -2+2y&=0\\ 2y&=2\\ y&=1\end{aligned}\right\}$$ Reemplazamos la incógnita x en la segunda ecuación para hallar el valor de la incógnita y

Solución: $S=\{(-2;1)\}$ Hay una única solución

9) $5x+8-2=2x+6+3x$ Restando $2x$; $3x$ y 8 y sumando 2 miembro a miembro

$5x-2x-3x=6-8+2$ Operando

$0x=0$ 0 es elemento absorbente de la multiplicación en $\mathbb{R}$

$0=0$

Cuando se llega a una expresión de este tipo, es decir a una identidad, un número igual a sí mismo, significa que cualquiera sea el valor que tome la incógnita x, la ecuación se va a verificar. Entonces en este caso, la solución son todos los números reales.

Solución: $S=\mathbb{R}$. Hay infinitas soluciones, cada valor de $x\in\mathbb{R}$

10) $2x+7+2x=5+4x$ Restando $4x$ y 7 miembro a miembro

$2x+2x-4x=5-7$ Operando

$0x=-2$ 0 es elemento absorbente de la multiplicación en $\mathbb{R}$

$0=-2$

Cuando se llega a una expresión de este tipo, es decir a un absurdo, un número igual a otro distinto, significa que no existe valor que tome la incógnita x para que la ecuación se verifique. Entonces en este caso, no hay solución.

Solución: $S=\varnothing$

A nosotros nos va a interesar resolver sistemas de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de ecuaciones lineales, cada una de las cuales tiene varias incógnitas y buscamos aquellos números como solución que resuelvan todas las ecuaciones al mismo tiempo. Este tipo de ecuaciones son muy útiles en la vida cotidiana.

Ejemplos:

1) Para el comienzo de las clases, una librería tiene preparados algunos combos de los productos que más se venden para la agilización de la venta. Los combos de lápices negros y gomas de borrar son dos: Combo A formado por 2 lápices y 3 gomas de borrar a \$31 y el Combo B formado por 4 lápices y 3 gomas de borrar por \$47.

a) Si una secretaria necesita comprar sólo un lápiz, ¿cuánto deberá abonar?

b) Un estudiante va a comprar una goma de borrar antes de entrar a un examen, ¿cuánto la paga?

Respuesta

Para poder responder a las preguntas del problema necesitamos averiguar el precio unitario de los lápices y el precio unitario de las gomas de borrar.

Primero es necesario ponerle “nombre” a cada incógnita. Sean

x el precio unitario de los lápices negros

y el precio unitario de las gomas de borrar

Entonces:

Combo A: 2 lápices a \$ x cada uno y 3 gomas de borrar a \$ y cada una, suman \$31

En símbolos: $2.x+3.y=31$

Combo B: 4 lápices a \$ x cada uno y 3 gomas de borrar a \$ y cada una, suman \$47

En símbolos: $4.x+3.y=47$

Por lo tanto, necesitamos resolver el sistema: $\begin{cases}2.x+3.y=31\\4.x+3.y=47\end{cases}$

Hay varios métodos para resolver sistemas. En este caso podemos hacerlo de manera un poco intuitiva y después lo asociaremos a un método:

El Combo B tiene dos lápices más que el Combo A, y la misma cantidad de gomas de borrar, entonces la diferencia entre lo que se paga en el Combo B y en el Combo A será el precio de esos dos lápices: $2.x=47-31 \Rightarrow 2.x=16$ y por lo tanto el precio de un lápiz sería $x=8$.

Como dos lápices valen \$16, en la primera ecuación tenemos: $16+3.y=31 \Rightarrow 3.y=31-16$

$3.y = 15$ y por lo tanto el precio de una goma de borrar sería $y = 5$.
La secretaria abonará \$ 8 por el lápiz negro.
El estudiante pagará \$ 5 por la goma de borrar.

La mayoría de las ocasiones en las que debemos resolver sistemas de ecuaciones, la resolución no es tan intuitiva como en este caso, entonces lo resolveremos un poco más formalmente.

$$\begin{cases} 2.x + 3.y = 31 \\ 4.x + 3.y = 47 \end{cases}$$

En el nivel medio se estudia cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por diferentes métodos: igualación, sustitución, reducción por sumas y restas, determinantes.
Considerando los "números" que forman parte de este sistema, vamos a resolverlo por reducción por sumas y restas:
En las dos ecuaciones, la incógnita y está multiplicada por 3, entonces si las restamos desaparece esta incógnita, queda sólo la incógnita x, que podremos despejar:

$$\begin{array}{r} 2.x + 3.y = 31 \\ - \quad \underline{4.x + 3.y = 47} \\ -2.x + \ 0 = -16 \end{array} \xrightarrow{\text{Restando miembro a miembro}} \quad \Rightarrow \quad -2.x = -16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8}$$

Si en las dos ecuaciones la incógnita x estuviese multiplicada por un mismo número, podríamos hacer lo mismo. Dado que en una de las ecuaciones está multiplicada por 2 y en la otra por 4 (que es igual a 2.2), podríamos multiplicar por 2 la primera ecuación, así la incógnita x estaría multiplicada por 4 también en esta ecuación. Desde el punto de vista del problema, sería equivalente a adquirir dos Combo A, o sea, 4 lápices negros y seis gomas de borrar y se abonaría por ello \$ 62.

$$\begin{array}{l} 2.x + 3.y = 31 \\ 4.x + 3.y = 47 \end{array} \xrightarrow{\times 2} \begin{array}{r} 4.x + 6.y = 62 \\ - \quad \underline{4.x + 3.y = 47} \\ 0 \ + 3y = 15 \end{array} \xrightarrow{\text{Restando miembro a miembro}} \quad \Rightarrow \quad 3.y = 15 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 5}$$

Matemáticamente, la solución es $S = \{(8;5)\}$

2) Una clínica geriátrica está haciendo una importante compra de camas ortopédicas y sillas de rueda para la mejor comodidad de sus pacientes. Como la empresa de venta de este tipo de artículos no podía cumplir con las cantidades solicitadas, se contrató también a una segunda empresa para que entre las dos cubran el pedido. Luego de varias negociaciones con ambas empresas, se llegó a un acuerdo de precios para cada artículo dada la cantidad solicitada. Las camas tienen un costo de \$ 6524 y las sillas de rueda, de \$ 4610 con la primera empresa, a la que se le extendió un cheque por \$ 217288; la segunda empresa vende las camas a \$ 6834 y las sillas de ruedas a \$ 4286 que fueron abonadas con un cheque de \$ 218924. El pedido para ambas empresas fue el mismo.

a) ¿Cuántas camas y cuántas sillas de rueda compró esta clínica?
b) Si al siguiente mes desean hacer un pedido igual, pero sólo a una de las empresas, (ahora sólo necesitan la mitad de la adquisición anterior, y todo el pedido a la misma empresa para mantener "precios preferenciales") y al pedirle nuevo presupuesto previo a la compra ambas empresas informan que por un problema de importación de suministros, las sillas de rueda aumentaron el 10%. ¿A cuál de las dos empresas conviene comprarle?

Respuesta

Para poder responder a las preguntas del problema necesitamos averiguar la cantidad de camas ortopédicas y la cantidad de sillas de rueda que se le compra a cada empresa; entonces es necesario ponerle "nombre" a cada incógnita. Sean

x cantidad de camas ortopédicas que se compra a una empresa
y cantidad de sillas de rueda que se compra a una empresa
Entonces:
Primera empresa: se le compran x camas a $ 6524 e y sillas de rueda a $ 4610 abonándose por ello $ 217288
En símbolos: $6524.x + 4610.y = 217288$
Segunda empresa: se le compran x camas a $ 6834 e y sillas de rueda a $ 4286 abonándose por ello $ 218924
En símbolos: $6834.x + 4286.y = 218924$

Por lo tanto, necesitamos resolver el sistema: $\begin{cases} 6524.x + 4610.y = 217288 \\ 6834.x + 4286.y = 218924 \end{cases}$

Ahora los números no ayudan para trabajar con la intuición, por lo tanto lo resolveremos mediante un método, por ejemplo, sustitución.
Despejemos alguna incógnita en alguna ecuación, por ejemplo, despejemos la x en la primera ecuación:

$$6524.x + 4610.y = 217288$$
$$6524.x = 217288 - 4610.y$$
$$\boxed{x = \frac{217288 - 4610.y}{6524}}$$

La reemplazamos en la segunda ecuación:

$$6834.x + 4286.y = 218924$$

$$6834.\left(\frac{217288 - 4610.y}{6524}\right) + 4286.y = 218924$$ Reemplazo el valor de x hallado

$$\frac{1484946192 - 31504740.y}{6524} + 4286.y = 218924$$ Propiedad distributiva

$$\frac{1484946192 - 31504740.y + 27961864.y}{6524} = 218924$$ Denominador común

$$\frac{1484946192 - 3542876.y}{6524} = 218924$$ Operando…

$$1484946192 - 3542876.y = 218924.6524$$ Multiplicando m. a m. por 6524

$$1484946192 = 1428260176 + 3542876.y$$ Sumando m. a m. $3542876.y$

$$1484946192 - 1428260176 = 3542876.y$$ Restando m. a m. 1428260176

$$56686016 = 3542876.y$$ Dividiendo m. a m. 3542876

$$\frac{56686016}{3542876} = y$$

$$\boxed{16 = y}$$

Reemplazamos el valor hallado en $x = \frac{217288 - 4610.y}{6524} \Rightarrow x = \frac{217288 - 4610.16}{6524} = \frac{143528}{6524}$

$$\boxed{x = 22}$$

Se compran 22 camas ortopédicas y 16 sillas de rueda a cada empresa.
a) La clínica compró 44 camas ortopédicas y 32 sillas de rueda.
b) Como las sillas de ruedas aumentaron un 10%, entonces en la primera empresa ahora cuestan $ 4610. 1,10 = $ 5071 y en la segunda cuestan $ 4286. 1,10 = $ 4714,60

Entonces:
El presupuesto de la primera empresa será: $6524.22+5071.16=224664$
El presupuesto de la segunda empresa será: $6834.22+4714,60.16=225781,60$
A pesar de que la segunda empresa tiene las sillas de ruedas a menor precio, conviene comprarle a la primera, puesto que el precio total es menor.

Sistemas de ecuaciones lineales:

Definición:

Se denomina sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una de las cuales tiene las mismas n incógnitas y de las que se espera obtener una solución que verifique absolutamente todas las ecuaciones:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad \text{con } a_{ij}\in\mathbb{R} \quad \forall 1\le i\le m; \quad \forall 1\le j\le n;\ b_i\in\mathbb{R} \quad \forall 1\le i\le m$$

a_{ij} se denomina coeficiente de la $j-ésima$ incógnita en la $i-ésima$ ecuación

b_i se denomina constante (o término independiente) de la $i-ésima$ ecuación

$x_1;\ x_2;\cdots;x_n$ son las incógnitas buscadas.

Se dice que S, por ser un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, es de orden $m\times n$; en particular, si $m=n$ el sistema se dice cuadrado de orden n.

Una $n-upla$ $(s_1;s_2;\cdots;s_n)$ es una solución del sistema si, al reemplazar x_1 por s_1; x_2 por $s_2;\ldots;x_n$ por s_n se verifican todas las ecuaciones.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=3 \\ -x_1+2x_2=-5 \end{cases}$ es un sistema cuadrado de orden 2

La dupla $(3;-1)$ es solución pues $\begin{cases} 2.3+3.(-1)=3 \quad ✓ \\ -3+2.(-1)=-5 \quad ✓ \end{cases}$

La dupla $(-3;3)$ NO es solución pues $\begin{cases} 2.(-3)+3.3=3 \quad ✓ \\ -(-3)+2.3=9\neq -5 \quad \times \end{cases}$

Se cumple la primera pero no la segunda ecuación.

2) $\begin{cases} -4x_1+2x_2=2 \\ 6x_1-3x_2=-3 \end{cases}$ es un sistema cuadrado de orden 2

La dupla $(-3;-5)$ es solución pues $\begin{cases} -4.(-3)+2.(-5)=2 \quad ✓ \\ 6.(-3)-3.(-5)=-3 \quad ✓ \end{cases}$

La dupla $(1;3)$ también es solución pues $\begin{cases} -4.1+2.3=2 \quad ✓ \\ 6.1-3.3=-3 \quad ✓ \end{cases}$

La dupla $(3;-2)$ NO es solución pues $\begin{cases} -4.3+2.(-2)=-16\neq 2 \quad \times \\ 6.3-3.(-2)=24\neq -3 \quad \times \end{cases}$

Comprobamos dos duplas que son solución, pero la tercera no lo es.

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13 \end{cases}$ es un sistema de orden 3×4

La cuaterna $(1;2;-1;3)$ es solución pues $\begin{cases} 1+2.2-4.(-1)+2.3=15 \\ 2.1-2.2+(-1)+3.3=6 \\ 1-3.2+2.(-1)-2.3=-13 \end{cases}$

La cuaterna $(2;1;1;-3)$ NO es solución pues $\begin{cases} 2+2.1-4.1+2.(-3)=-6 \neq 15 \\ 2.2-2.1+1+3.(-3)=-6 \neq 6 \\ 2-3.1+2.1-2.(-3)=7 \neq -13 \end{cases}$

Al igual que los ejemplos que hemos visto en la introducción, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, más de una solución o no tener solución.
En el segundo ejemplo de sistemas de ecuaciones, vimos que dos duplas son solución. Cuando resolvemos un sistema, podemos asegurar que si tiene dos soluciones, en realidad matemáticamente tiene infinitas; si el sistema está asociado a un problema, es probable que sólo algunas de las infinitas tengan sentido como respuesta.

Clasificación de sistemas:

Los sistemas se clasifican de acuerdo al tipo de soluciones que tienen en:

Sistemas Compatibles
Tienen solución

→ Determinados: **SCD**
Única solución
Solución: $S = \{(s_1; s_2; \cdots; s_n)\}$
Con cada $s_i \in \mathbb{R}$

→ Indeterminados: **SCI**
Infinitas soluciones
Solución: $S = \{(s_1; s_2; \cdots; s_n)\}$
Cada s_i es una función lineal en una o más variables

Sistemas Incompatibles: **SI**
No tienen solución
Solución: $S = \varnothing$

Estos son los casos a los que podemos llegar al resolver un sistema, la cuestión ahora es cómo lo resolvemos. No importa cómo se clasifique un sistema, siempre vamos a realizar los mismos pasos para resolverlo. La decisión sobre qué tipo de sistema es, se toma en función de a qué llegamos al resolverlo.

Sistemas homogéneos:

Se denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo a un sistema de ecuaciones lineales cuyas constantes son todas nulas: $b_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Este tipo de sistema recibe un nombre particular porque también tiene una característica que lo diferencia de los demás: *siempre es un sistema compatible*, alcanza con que todas las incógnitas sean nulas para que se verifiquen las igualdades: $x_1 = 0;\ x_2 = 0; \cdots ; x_n = 0$

Puede ser un sistema compatible determinado, en cuyo caso la única solución es $S = \{(0;0;\cdots;0)\}$ o bien compatible indeterminado, donde la solución será $S = \{(s_1; s_2; \cdots; s_n)\}$ con cada s_i función lineal en una o más variables.

Todo sistema de ecuaciones tiene un sistema homogéneo asociado y hay una relación muy importante entre las soluciones de ambos, que luego estudiaremos.

Si $S_B : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \quad S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ es el sistema homogéneo asociado

Es muy importante saber resolver sistemas de ecuaciones lineales y relacionar las soluciones de sistemas no homogéneos con las de los sistemas homogéneos asociados pues, a partir de ahora, en Álgebra, todos los temas que serán estudiados se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplos:

1) $S_B : \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 12 \end{cases}$ tiene por solución $S_B = \{(5;-2)\}$

El sistema homogéneo asociado es $S_0 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ tiene por solución $S_0 = \{(0;0)\}$

2) $S_B : \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 12 \\ -2x_1 + 4x_2 = -8 \end{cases}$ tiene por solución $S_B = \{(4 + 2x_2; x_2)\}$

El sistema homogéneo asociado es $S_B : \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ tiene por solución $S_0 = \{(2x_2; x_2)\}$

Los sistemas de ecuaciones, ya sean homogéneos o no homogéneos, se resuelven de la misma manera.

Para ver cómo los resolvemos, vamos a introducir unos conceptos previos:

Sistemas equivalentes:

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen la misma solución.

Ejemplo:

Supongamos el sistema $S:\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ x_1+2x_2=-3\end{cases}$ cuya solución es $S=\{(1;-2)\}$

Son sistemas equivalentes con este:

a) $\begin{cases}4x_1-6x_2=16\\ x_1+2x_2=-3\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ -5x_1-10x_2=15\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ 3x_1-x_2=5\end{cases}$ d) $\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ 7x_2=-14\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x_1=2\\ 7x_2=-14\end{cases}$

Pues en todos los casos, $S=\{(1;-2)\}$

NOTA: Cuando hablamos de LA solución de un sistema de ecuaciones, hablamos de todas sus soluciones. La solución es un conjunto de un elemento (SCD), de infinitos elementos (SCI) o de ningún elemento (SI).

Cuando necesitamos resolver un sistema de ecuaciones, debemos encontrar un sistema equivalente al dado, pero que sea "más sencillo" de resolver. Esto significa que cada una de las ecuaciones tenga alguna/s incógnita/s menos que las otras, de forma que en algún momento podamos despejar una incógnita en una ecuación simple.

En el ejemplo anterior, los sistemas equivalentes (a); (b) y (c) representan la misma dificultad para resolverlos que el sistema original, en cambio, en (d) podemos despejar x_2 fácilmente en la segunda ecuación: $7x_2=-14 \Rightarrow x_2=-2$, y luego reemplazarlo en la primera ecuación para poder despejar x_1: $2x_1-3x_2=8 \Rightarrow 2x_1-3(-2)=8 \Rightarrow 2x_1+6=8 \Rightarrow 2x_1=2 \Rightarrow x_1=1$, mientras que en el (e) , en la primera ecuación: $2x_1=2 \Rightarrow x_1=1$ y en la segunda ecuación, $7x_2=-14 \Rightarrow x_2=-2$. De los cinco sistemas equivalentes al sistema que tenemos, los casos (d) y (e) nos permiten resolverlos en forma simple, y comparando estos últimos, (e) es aún más fácil.

Para encontrar un sistema equivalente al dado, vamos a efectuar operaciones elementales.
Las *operaciones elementales* son:

1) Intercambiar el orden de las ecuaciones.
2) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo: $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.
3) Sumarle a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

En el ejemplo anterior: $S:\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ x_1+2x_2=-3\end{cases}$

Un sistema equivalente con S es $\begin{cases}x_1+2x_2=-3\\ 2x_1-3x_2=8\end{cases}$ que se obtuvo de permutar las dos ecuaciones: $E_1\leftrightarrow E_2$ (propiedad (1))

a) $\begin{cases}4x_1-6x_2=16\\ x_1+2x_2=-3\end{cases}$ es un sistema equivalente con S originado de multiplicar por 2 la primera ecuación: $2.E_1$ (propiedad (2))

b) $\begin{cases}2x_1-3x_2=8\\ -5x_1-10x_2=15\end{cases}$ es un sistema equivalente con S proveniente de multiplicar por -5 la segunda ecuación: $-5.E_2$ (propiedad (2))

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$ es un sistema equivalente con S proveniente de sumarle la primera a la segunda ecuación: $E_1 + E_2$ (propiedad (3))

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8 \\ \quad\quad 7x_2 = -14 \end{cases}$ es un sistema equivalente con S derivado de restarle la primera al duplo de la segunda ecuación: $2.E_2 + (-1)E_1$ (usamos simultáneamente las propiedades (2) y (3)).

e) $\begin{cases} 14x_1 \quad\quad = 14 \\ \quad\quad 7x_2 = -14 \end{cases}$ es un sistema equivalente con (d) obtenido de sumarle siete veces la primera al triple de la segunda ecuación: $7.E_1 + 3E_2$ (usamos simultáneamente las propiedades (2) y (3)).

Ejemplos:

1) $S: \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ Dado que x_1 tiene coeficiente 1 en la primera ecuación y coeficiente 2 en la segunda ecuación, si cambiamos la segunda ecuación por $E_2 - 2.E_1$ nos queda el sistema equivalente que no tiene x_1 en la segunda ecuación: $S: \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -10x_2 = -10 \end{cases}$. Este sistema permite resolver la segunda ecuación inmediatamente, para luego resolver la primera:

$-10x_2 = -10 \;\Rightarrow\; x_2 = 1$

$x_1 + 3x_2 = 5 \;\Rightarrow\; x_1 + 3.1 = 5 \;\Rightarrow\; x_1 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; x_1 = 5 - 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$

Entonces $S = \{(2;1)\}$; es un **SCD.**

2) $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$ Dado que x_1 tiene coeficiente 1 en la primera ecuación y coeficiente 2 en la segunda ecuación, si cambiamos la segunda ecuación por $E_2 - 2.E_1$, y además como tiene coeficiente 3 en la tercera ecuación, si cambiamos la tercera por $E_3 - 3.E_1$, nos queda el sistema equivalente que no tiene x_1 en la segunda y tercera ecuación: $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 - x_3 = 11 \\ -5x_2 + 5x_3 = -10 \end{cases}$. Ahora, la segunda ecuación tiene coeficiente -2 en x_2, mientras que, en la tercera, el coeficiente es -5. Si cambiamos la tercera ecuación por $2E_3 - 5.E_2$, nos queda un sistema equivalente que no tiene x_1 ni x_2 en la tercera ecuación: $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 - x_3 = 11 \\ 15x_3 = -75 \end{cases}$ Este sistema permite resolver la tercera ecuación inmediatamente, para luego resolver la segunda y después, la primera:

$15x_3 = -75 \;\Rightarrow\; x_3 = -5$

$-2x_2 - x_3 = 11 \;\Rightarrow\; -2x_2 - (-5) = 11 \;\Rightarrow\; -2x_2 = 11 - 5 \;\Rightarrow\; -2x_2 = 6 \;\Rightarrow\; x_2 = -3$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 + 2.(-3) - (-5) = 1 \;\Rightarrow\; x_1 - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$

Entonces $S = \{(2;-3;-5)\}$; es un **SCD.**

3) $S:\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=3 \\ 4x_1+x_2+10x_3=9 \end{cases} \xrightarrow[E_3\leftrightarrow E_3-2E_1]{E_2\leftrightarrow 2E_2-3E_1} S:\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ -5x_2+14x_3=15 \\ -5x_2+14x_3=15 \end{cases} \xrightarrow{E_3\leftrightarrow E_3-E_2} S:\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ -5x_2+14x_3=15 \\ 0=0 \end{cases}$

La tercera ecuación es una identidad, "desaparece", entonces partimos de la segunda, despejando alguna de las incógnitas, conviene despejar x_2:

$$-5x_2+14x_3=15 \;\Rightarrow\; -5x_2=15-14x_3 \;\Rightarrow\; x_2=\frac{15-14x_3}{-5} \;\Rightarrow\; x_2=-3+\frac{14}{5}x_3$$

Ahora reemplazamos x_2 en la primera ecuación, pero como x_2 quedó en función de x_3, ya no vemos cuál conviene despejar, despejamos x_1 también en función de x_3:

$$2x_1+3x_2-2x_3=-3 \;\Rightarrow\; 2x_1+3\left(-3+\frac{14}{5}x_3\right)-2x_3=-3 \;\Rightarrow\; 2x_1-9+\frac{42}{5}x_3-2x_3=-3$$

$$\Rightarrow\; 2x_1=6-\frac{32}{5}x_3 \;\Rightarrow\; x_1=3-\frac{16}{5}x_3$$

Entonces: $S=\left\{\left(3-\frac{16}{5}x_3;-3+\frac{14}{5}x_3;x_3\right):x_3\in\mathbb{R}\right\}$; es un **SCI.**

4) $S:\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=2 \\ 3x_1+5x_2+4x_3=4 \\ -x_1+3x_2-2x_3=5 \end{cases} \xrightarrow[E_3\leftrightarrow 2E_3+E_1]{E_2\leftrightarrow 2E_2-3E_1} S:\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=2 \\ 7x_2-x_3=2 \\ 7x_2-x_3=12 \end{cases} \xrightarrow{E_3\leftrightarrow E_3-E_2} S:\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ -5x_2+14x_3=15 \\ 0x_3=10 \end{cases}$

La tercera ecuación es un absurdo. Esto nos indica que este sistema no tiene solución.
Entonces $S=\varnothing$; es un **SI.**

Aun utilizando las operaciones elementales, puede ser trabajoso y a veces confuso, resolver el sistema de esa manera. Hay formas más sencillas de llevar adelante el mismo procedimiento. Vamos a definir un par de conceptos previos:

<u>Matrices de un sistema de ecuaciones:</u>

<u>*Definición de Matriz Asociada*</u>*:*

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$.

Se denomina *matriz asociada* al sistema o *matriz de coeficientes* del sistema a la matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ cuyos elementos son los coeficientes del sistema: las filas son los coeficientes de cada ecuación, las columnas son los coeficientes de cada incógnita.

Definición de Matriz ampliada:

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Se denomina *matriz ampliada* del sistema a la matriz $A' \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

cuyos elementos son los coeficientes y constantes del sistema: las filas son los coeficientes y constante de cada ecuación, las primeras n columnas son los coeficientes de cada incógnita y la última columna son las constantes.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + \quad + 6x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 8 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right)$

2) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \\ -5x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc:c} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{array}\right)$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad = 1 \\ 2x_1 + \quad -3x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad = 4 \\ 2x_1 + \quad -3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & -4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & -7 & 4 \end{array}\right)$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & -4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right)$

En los casos (3) y (4) los sistemas tienen los mismos coeficientes, por lo tanto tienen la misma matriz asociada. Lo mismo sucede con los casos (5) y (6).
Hay distintos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, pasemos a estudiarlos:

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Método de eliminación de Gauss:

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Sea $A' \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ la matriz ampliada del sistema: $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Este método consiste en aplicar sobre las filas de la matriz ampliada del sistema, las mismas operaciones elementales que antes aplicamos sobre las ecuaciones, ya que cada fila representa una ecuación. Las *operaciones elementales* sobre las filas de la matriz asociada son:

1) Intercambiar el orden de las filas: $F_i \leftrightarrow F_k$
2) Multiplicar una fila por un escalar no nulo, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: $F_i \leftrightarrow \lambda F_i$
3) Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila: $F_i \leftrightarrow F_i + \lambda F_k$

El método de eliminación de Gauss para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz ampliada del sistema que se quiere resolver, a través de la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la "forma escalonada" en las filas. La matriz resultante obtenida es equivalente a la matriz original, por lo tanto el sistema es equivalente al sistema original.

Una matriz se encuentra en la "forma escalonada" en las filas si:
- Si una fila no consta únicamente de ceros, tiene un primer elemento no nulo (de izquierda a derecha), llamado elemento principal o pivote.
- Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.
- Si dos filas consecutivas son no nulas, el elemento principal o pivote de la fila inferior se presenta más a la derecha del elemento principal o pivote de la fila superior.
- Cada columna que contenga un elemento principal, tiene ceros por debajo de él.

La intención es llevar la matriz asociada del sistema a una matriz "triangular superior" o lo más parecida a ella en caso de no ser una matriz cuadrada.
Se utilizará el pivote para "poner ceros" por debajo de él mediante operaciones elementales.

NOTA: Conviene siempre dejar escrita las operaciones elementales que se hacen para pasar de una matriz a otra equivalente. En los ejemplos, siempre la primera fila que aparece en el cálculo es la fila que se va a cambiar (de igual manera que fue hecho antes con los ejemplos de ecuaciones).

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2=5 \\ 2x_1-x_2=2 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{1} & 3 & 5 \\ 0 & \underline{-7} & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2=5 \\ -7x_2=-8 \end{cases}$$

Entonces:

Segunda ecuación: $-7x_2=-8 \Rightarrow x_2=\dfrac{-8}{-7} \Rightarrow x_2=\dfrac{8}{7}$

Primera ecuación: $x_1+3x_2=5 \Rightarrow x_1+3.\dfrac{8}{7}=5 \Rightarrow x_1=5-\dfrac{24}{7} \Rightarrow x_1=\dfrac{11}{7}$

$S=\left\{\left(\dfrac{11}{7};\dfrac{8}{7}\right)\right\}$ **SCD**

2) $\begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ -3x_1+6x_2=-9 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2+3F_1} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{1} & -2 & 3 \\ 0 & \underline{0} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ 0x_2=0 \end{cases}$$

Entonces:

Segunda ecuación: $0x_2=0 \Rightarrow 0=0$ es una identidad

Primera ecuación: $x_1-2x_2=3 \Rightarrow x_1=3+2x_2$

$S=\{(3+2x_2;x_2): x_2\in\mathbb{R}\}$ **SCI**

En la primera ecuación despejamos x_1 por simplicidad, pero podríamos elegir x_2, es indistinto.

3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=4 \\ -3x_1+6x_2=-1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{2F_2+3F_1} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{2} & -4 & 4 \\ 0 & \underline{0} & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2=4 \\ 0x_2=10 \end{cases}$$

Entonces:

Segunda ecuación: $0x_2=10 \Rightarrow 0=10$ es un absurdo

El sistema no tiene solución

$S=\varnothing$ **SI**

4) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=6 \\ x_1-3x_2+x_3=3 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc:c} -3 & 6 & -4 & 12 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{3F_3+F_1}{\overset{3F_2+2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} -3 & 6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 42 \\ 0 & -3 & -1 & 21 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc:c} \underline{-3} & 6 & -4 & 12 \\ 0 & \underline{-3} & -1 & 21 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 42 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ -3x_2-x_3=21 \\ -2x_3=42 \end{cases}$$

Entonces:

Tercera ecuación: $-2x_3=42 \Rightarrow x_3=-21$

Segunda ecuación: $-3x_2-x_3=21 \Rightarrow -3x_2-(-21)=21 \Rightarrow -3x_2=0 \Rightarrow x_2=0$

Primera ecuación: $-3x_1+6x_2-4x_3=12 \Rightarrow -3x_1+6.0-4(-21)=12 \Rightarrow -3x_1=12-84 \Rightarrow x_1=24$

$S=\{(24;0;-21)\}$ **SCD**

5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3+2F_1}{\overset{F_2-3F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -1 & 2 & 10 \\ 0 & \underline{1} & -4 & -21 \\ 0 & 0 & \underline{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ \qquad x_2 - 4x_3 = -21 \end{cases}$$

Entonces:
Segunda ecuación: $x_2 - 4x_3 = -21 \Rightarrow x_2 = -21 + 4x_3$
Primera ecuación:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \Rightarrow x_1 - (-21 + 4x_3) + 2x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + 21 - 2x_3 = 10 \Rightarrow x_1 = -11 + 2x_3$$

$$S = \{(-11 + 2x_3; -21 + 4x_3; x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

SCI

6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & 1 & -3 & 8 \\ 0 & \underline{1} & 5 & -10 \\ 0 & 0 & \underline{0} & -6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ \qquad x_2 + 5x_3 = -10 \\ \qquad\qquad 0x_3 = -6 \end{cases}$$

Entonces:
Tercera ecuación: $0x_3 = -6 \Rightarrow 0 = -6$ es un absurdo
El sistema no tiene solución

$S = \varnothing$

SI

7) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{3F_3+F_1}{\overset{3F_2-2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{3} & 6 & -3 & 9 \\ 0 & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9$$

Entonces:
La única ecuación: $3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \Rightarrow 3x_1 = 9 - 6x_2 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_2 + x_3$

$$S = \{(3 - 2x_2 + x_3; x_2; x_3) : x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

SCI

8) $\begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{2F_2-F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{2} & 6 & 6 \\ 0 & \underline{-2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ -2x_2=2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Segunda ecuación: } -2x_2=2 \;\Rightarrow\; x_2=\dfrac{2}{-2} \;\Rightarrow\; x_2=-1 \\ \text{Primera ecuación: } 2x_1+6x_2=6 \;\Rightarrow\; 2x_1+6.(-1)=6 \;\Rightarrow\; 2x_1=6+6 \;\Rightarrow\; x_1=\dfrac{12}{2}=6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} S=\{(6;-1)\} \\ \textbf{\textit{SCD}} \end{array}$$

9) $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 4x_1-x_2=5 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{3F_3-4F_1}{\overset{3F_2-2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc:c} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 17 & 10 \\ 0 & 13 & 11 \end{array}\right) \overset{17F_3-13F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{3} & -4 & 1 \\ 0 & \underline{17} & 10 \\ 0 & 0 & 57 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ -2x_2=2 \\ 0x_1+0x_2=57 \end{cases}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tercera ecuación: } 0x_1+0x_2=57 \;\Rightarrow\; 0=57 \text{ es un absurdo} \\ \text{El sistema no tiene solución} \end{array}\right\} \begin{array}{c} S=\varnothing \\ \textbf{\textit{SI}} \end{array}$$

10) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=2 \\ -3x_1+6x_2=-3 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{2F_3-F_1}{\overset{2F_2+3F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc:c} \underline{2} & -4 & 2 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{2x_1-4x_2=2$$

Entonces:

La única ecuación: $2x_1-4x_2=2 \;\Rightarrow\; 2x_1=2+4x_2 \;\Rightarrow\; x_1=1+2x_2$

$$S=\{(1+2x_2;x_2): x_2\in\mathbb{R}\}$$

SCI

11) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=8 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{2F_2-5F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} \underline{2} & -1 & 4 & 8 \\ 0 & \underline{13} & -14 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=8 \\ 13x_2-14x_3=-10 \end{cases}$$

Entonces:

Segunda ecuación: $13x_2-14x_3=-10 \;\Rightarrow\; 13x_2=-10+14x_3 \;\Rightarrow\; x_2=-\dfrac{10}{13}+\dfrac{14}{13}x_3$

Primera ecuación:

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \;\Rightarrow\; 2x_1 - \left(-\frac{10}{13} + \frac{14}{13}x_3\right) + 4x_3 = 8 \;\Rightarrow\; 2x_1 = \frac{94}{13} - \frac{38}{13}x_3 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{47}{13} - \frac{19}{13}x_3$$

$$S = \left\{\left(\frac{47}{13} - \frac{19}{13}x_3 ; -\frac{10}{13} + \frac{14}{13}x_3 ; x_3\right) : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

SCI

12) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -9 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & -10 & -9 \end{array}\right) \overset{F_2 + 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & \underline{0} & 0 & -3 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3 \end{cases}$$

Entonces:

Segunda ecuación: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3 \;\Rightarrow\; 0 = -3$ es un absurdo.
El sistema no tiene solución

$\left.\right\} S = \varnothing$ ***SI***

Método de Gauss - Jordan:

Como ya vimos, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el método de Gauss-Jordan sirve para hallar una matriz equivalente a A, pero que tiene muchos ceros.

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Sea $A' \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ la matriz ampliada del sistema: $A' = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Aplicaremos el método de Gauss - Jordan sobre la matriz A', pero los pivotes sólo serán elegidos sobre la matriz A.
Este método es equivalente al método de Gauss, pero con la ventaja de tener más ceros en la matriz asociada al sistema, y por lo tanto es más fácil despejar las incógnitas; sin embargo, se necesita prácticamente el mismo trabajo para resolverlo.
Terminado el proceso de Gauss – Jordan, sólo se despejan los pivotes.
Veremos a través de los mismos ejemplos anteriores las ventajas.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{7} \\ -7x_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{7} \\ x_2 = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{11}{7};\frac{8}{7}\right)\right\}$$

SCD

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + 6x_2 = -9 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Despejamos x_1 pues fue nuestro pivote. $S = \{(3 + 2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

SCI

3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ 0x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ 0 = 5 \end{cases}$$ **Absurdo**

$S = \varnothing$

SI

4) $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 12 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -4 & 12 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x_3 = 21 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -21 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow S = \{(24; 0; -21)\}$$

SCD

5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -11 \\ x_2 - 4x_3 = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -11 + 2x_3 \\ x_2 = -21 + 4x_3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-11 + 2x_3; -21 + 4x_3; x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

SCI

Despejamos x_1 y x_2 pues fueron nuestros pivotes.

6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & -18 \\ 2 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2+5x_3=-4 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=-6 \\ 2x_1-8x_3=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2+5x_3=-4 \\ 0=-6 \text{ Absurdo} \\ 2x_1-8x_3=12 \end{cases} \Rightarrow S=\varnothing$$

SI

7) $\begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3=9 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=6 \\ -x_1-2x_2+x_3=-3 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \{-x_1-2x_2+x_3=-3$$

$$\Rightarrow \{x_3=-3+x_1+2x_2 \Rightarrow S=\{(x_1;x_2;-3+x_1+2x_2):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}$$

Despejamos x_3 pues fue nuestro pivote. ***SCI***

Notar que la respuesta está escrita distinta que en el ejemplo resuelto por Gauss, pero se puede verificar que es la misma, simplemente es otra forma de escribir el mismo resultado.

8) $\begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_2=-2 \\ x_1=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=-1 \\ x_1=6 \end{cases} \Rightarrow S=\{(6;-1)\}$$

SCD

9) $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 4x_1-x_2=5 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -13 & 0 & -19 \\ 14 & 0 & 19 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\frac{19}{14} \\ 14 & 0 & 19 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \text{ Absurdo} \Rightarrow S=\varnothing$$

SI

10) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=2 \\ -3x_1+6x_2=-3 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{x_1-2x_2=1 \Rightarrow \{x_1=1+2x_2$$

$$S=\{(1+2x_2;x_2):x_2\in\mathbb{R}\}$$

Despejamos x_1 pues fue nuestro pivote. ***SCI***

11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 13 & 0 & 19 & 47 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \frac{14}{13} & \frac{10}{13} \\ 13 & 0 & 19 & 47 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 + \frac{14}{13}x_3 = \frac{10}{13} \\ 13x_1 + 19x_3 = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{14}{13}x_3 - \frac{10}{13} \\ x_1 = \frac{47}{13} - \frac{19}{13}x_3 \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{47}{13} - \frac{19}{13}x_3 ; \frac{14}{13}x_3 - \frac{10}{13} ; x_3 \right) : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

SCI

Despejamos x_1 y x_2 pues fueron nuestros pivotes.

12) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -9 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & -10 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 0 = -3 \end{cases} \underset{\textbf{Absurdo}}{\Rightarrow} S = \varnothing$$

SI

En los casos en los cuales el sistema es compatible indeterminado, si bien se podría elegir la incógnita a despejar, conviene despejar siempre la que se usó de pivote; de esta manera, son más simples los cálculos.

Simultáneamente a la resolución del sistema, podemos analizar cómo se clasifica éste. Si por eliminación de Gauss se anulan filas de una matriz, si utilizamos el método de Gauss-Jordan se anulan la misma cantidad de filas. El cómo se anulan o no las filas nos dice si el sistema es compatible determinado, indeterminado o incompatible:

<u>Teorema de Rouchè – Frobenius</u>:

Dado un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas S cuya matriz asociada o de coeficientes es $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y su matriz ampliada es $A' \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, entonces:

- Si $Rg(A) = Rg(A') = n$ el sistema es un sistema compatible determinado: **SCD.**
- Si $Rg(A) = Rg(A') < n$ el sistema es un sistema compatible indeterminado: **SCI.**
- Si $Rg(A) \neq Rg(A')$ el sistema es un sistema incompatible: **SI.**

Este teorema nos permite analizar cómo se clasifica el sistema antes de resolverlo, pero como debemos analizar el rango tanto de la matriz asociada A como el de la matriz ampliada A', al menos debemos triangular ambas matrices (método de Gauss) o bien "pivotearlas" (método de Gauss – Jordan). Alcanza con hacerlo con A' y analizar desde esta, a la matriz A

Vamos a analizar cada uno de los ejemplos que vimos en la resolución de los métodos anteriores:

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2=5 \\ 2x_1-x_2=2 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & -7 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \end{cases} \quad \textbf{SCD}$$

2) $\begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ -3x_1+6x_2=-9 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=1 \\ Rg(A')=1 \end{cases} \quad \textbf{SCI}$$

3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=4 \\ -3x_1+6x_2=-1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=1 \\ Rg(A')=2 \end{cases} \quad \textbf{SI}$$

4) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=6 \\ x_1-3x_2+x_3=3 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -4 & 12 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=3 \\ Rg(A')=3 \end{cases} \quad \textbf{SCD}$$

5) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=9 \\ -2x_1+x_2=1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \end{cases} \quad \textbf{SCI}$$

6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & -18 \\ 2 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ Rg(A) = 2 \\ Rg(A') = 3 \end{cases} \quad \textbf{SI}$$

7) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ Rg(A) = 1 \\ Rg(A') = 1 \end{cases} \quad \textbf{SCI}$$

8) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 2 \\ Rg(A') = 2 \end{cases} \quad \textbf{SCD}$$

9) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 4x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -13 & 0 & -19 \\ 14 & 0 & 19 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\frac{19}{14} \\ 14 & 0 & 19 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 2 \\ Rg(A') = 3 \end{cases} \quad \textbf{SI}$$

10) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 = -3 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 1 \\ Rg(A') = 1 \end{cases} \quad \textbf{SCI}$$

11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 13 & 0 & 19 & 47 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \frac{14}{13} & \frac{10}{13} \\ 13 & 0 & 19 & 47 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ Rg(A) = 2 \ \textbf{SCI} \\ Rg(A') = 2 \end{cases}$$

12) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -9 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & -10 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ Rg(A) = 1 \\ Rg(A') = 2 \end{cases} \quad \textbf{SI}$$

En los casos en los que la cantidad de incógnitas es mayor que la cantidad de ecuaciones (ejemplos (11) y (12)), el sistema nunca puede ser compatible determinado, puesto que seguro, los rangos de ambas matrices son menores que la cantidad de incógnitas.
Es los casos en los cuales el sistema de n incógnitas es **compatible**, o sea $Rg(A) = Rg(A')$, la cantidad de variables libres, o grados de libertad, que vamos a tener en las soluciones siempre es $n - Rg(A)$. Como podemos despejar la cantidad $Rg(A)$ incógnitas de nuestro sistema de ecuaciones, estas van a depender de las restantes $n - Rg(A)$ incógnitas.
Esta relación va a ser muy importante cuando trabajemos con espacios vectoriales en las UNIDADES TEMÁTICAS Nº 2; 3 y 4.

Veamos los ejemplos anteriores, de los cuales ya conocemos sus soluciones:

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 2 \\ Rg(A') = 2 \end{cases}$ **SCD** $\quad$ $Variables\ libres: 2 - 2 = 0$

No hay variables libres puesto que la solución es única: $S = \left\{ \left(\frac{11}{7}; \frac{8}{7} \right) \right\}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + 6x_2 = -9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 1 \\ Rg(A') = 1 \end{cases}$ **SCI** $\quad$ $Variables\ libres: 2 - 1 = 1$

Como la solución es $S = \{(3 + 2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$, x_2 es la variable libre.

3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} n = 2 \\ Rg(A) = 1 \\ Rg(A') = 2 \end{cases}$ **SI**

Como este sistema no tiene solución, no aplica la relación entre cantidad de variables y rango.

4) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=6 \\ x_1-3x_2+x_3=3 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=3 \\ Rg(A')=3 \end{cases}$ **SCD** $Variables\ libres: 3-3=0$

No hay variables libres puesto que la solución es única: $S=\{(24;0;-21)\}$

5) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=9 \\ -2x_1+x_2 \qquad =1 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \end{cases}$ **SCI** $Variables\ libres: 3-2=1$

Como la solución es $S=\{(-11+2x_3;-21+4x_3;x_3): x_3 \in \mathbb{R}\}$, x_3 es la variable libre.

6) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-x_3=6 \\ -2x_1-2x_2-2x_3=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=3 \end{cases}$ **SI**

Como este sistema no tiene solución, no aplica la relación entre cantidad de variables y rango.

7) $\begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3=9 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=6 \\ -x_1-2x_2+x_3=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=1 \\ Rg(A')=1 \end{cases}$ **SCI** $Variables\ libres: 3-1=2$

Como la solución es $S=\{(x_1;x_2;-3+x_1+2x_2): x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$, x_1 y x_2 son las variables libres.

8) $\begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{cases}$ $\begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \end{cases}$ **SCD** $Variables\ libres: 2-2=0$

No hay variables libres puesto que la solución es única: $S=\{(6;-1)\}$

9) $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 4x_1-x_2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=3 \end{cases}$ **SI**

Como este sistema no tiene solución, no aplica la relación entre cantidad de variables y rango.

10) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=2 \\ -3x_1+6x_2=-3 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} n=2 \\ Rg(A)=1 \\ Rg(A')=1 \end{cases}$ **SCI** $Variables\ libres: 2-1=1$

Como la solución es $S=\{(1+2x_2;x_2): x_2 \in \mathbb{R}\}$, x_2 es la variable libre.

11) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=8 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \end{cases}$ **SCI** $Variables\ libres: 3-2=1$

Como la solución es $S=\left\{\left(\frac{47}{13}-\frac{19}{13}x_3;\frac{14}{13}x_3-\frac{10}{13};x_3\right):x_3\in\mathbb{R}\right\}$, x_3 es la variable libre.

12) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=3 \\ -6x_1+4x_2-10x_3=-9 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} n=3 \\ Rg(A)=1 \\ Rg(A')=2 \end{cases}$ **SI**

Como este sistema no tiene solución, no aplica la relación entre cantidad de variables y rango.

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones:

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

cuya *matriz asociada* es $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, podemos considerar el vector de incógnitas como una matriz columna $X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ y al vector de constantes como una matriz columna $B\in\mathbb{R}^{m\times 1}$,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, entonces, se puede expresar al sistema como un producto de matrices:

$S:\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ o equivalentemente: $S:A.X=B$

Volviendo a los conocidos ejemplos anteriores:

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2=5 \\ 2x_1-x_2=2 \end{cases}$ $\quad S:\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ -3x_1+6x_2=-9 \end{cases}$ $\quad S:\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=4 \\ -3x_1+6x_2=-1 \end{cases}$ $\quad S:\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=6 \\ x_1-3x_2+x_3=3 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=9 \\ -2x_1+x_2 \qquad =1 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-x_3=6 \\ -2x_1-2x_2-2x_3=-4 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3=9 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=6 \\ -x_1-2x_2+x_3=-3 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

9) $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 4x_1-x_2=5 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

10) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=2 \\ -3x_1+6x_2=-3 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

11) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=8 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

12) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=3 \\ -6x_1+4x_2-10x_3=-9 \end{cases}$ $S:\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -6 & 4 & -10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Una vez halladas las incógnitas, el vector de incógnitas $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ será el vector de soluciones del sistema.

Proposición:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es una matriz inversible
b) $A.X = B$ tiene solución única, $\forall \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.
c) $A.X = N$ tiene como única solución a la solución trivial: $X = N$ (N la matriz nula de $\mathbb{R}^{n\times 1}$)
d) A es equivalente por filas a la matriz I_n.

Método Matricial:

Dado un sistema de ecuaciones lineales cuadrado con n incógnitas cuya *matriz asociada* es $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y considerando el vector de incógnitas (soluciones) y al vector de constantes como las matrices columna $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, como el sistema de ecuaciones cuadrado expresado como un producto de matrices es $S: A.\,X = B$ entonces, si $Det(A) \neq 0$ o dicho de otra manera, $Rg(A) = n$, A es inversible y, por la proposición anterior, podemos obtener la única solución pre-multiplicando miembro a miembro por A^{-1}:

$A.X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}.A).X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad I_n.X = A^{-1}.B$ y por lo tanto la solución es $X = A^{-1}.B$.

Este método sólo se puede utilizar si A es una matriz inversible, es decir, sólo si es un **SCD**.

Considerando los ejemplos cuadrados anteriores, de los cuales ya conocemos su rango y soluciones, veamos cómo resolverlos de esta manera, cuando sea posible:

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad S: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad Det(A) = -7 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + 6x_2 = -9 \end{cases} \qquad S: \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad Det(A) = 0$

No tiene única solución. Es un sistema compatible indeterminado o incompatible, este método no puede deducirlo ni buscar la solución.

3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases} \qquad S: \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad Det(A) = 0$

No tiene única solución. Es un sistema compatible indeterminado o incompatible, este método no puede deducirlo ni buscar la solución.

4) $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 12 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad S: \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad Det(A) = 2 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -21 \end{pmatrix}$$

5) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$ $\quad S: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Det(A) = 0$

No tiene única solución. Es un sistema compatible indeterminado o incompatible, este método no puede deducirlo ni buscar la solución.

6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$ $\quad S: \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad Det(A) = 0$

No tiene única solución. Es un sistema compatible indeterminado o incompatible, este método no puede deducirlo ni buscar la solución.

7) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ $\quad S: \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad Det(A) = 0$

No tiene única solución. Es un sistema compatible indeterminado o incompatible, este método no puede deducirlo ni buscar la solución.

Los casos (8) a (12) no son cuadrados, sus matrices asociadas no tienen inversa, este método no sirve en dichos casos.

Como veíamos antes, este método sólo sirve si el sistema cuadrado y **SCD**.
Este método es muy práctico para sistemas de orden 2, pues es rápido encontrar la inversa; para sistemas de orden 3 o mayores, la búsqueda de la inversa lo hace más trabajoso, es preferible utilizar uno de los métodos anteriores.

NOTA:
Dado el sistema de ecuaciones matricial cuya *matriz asociada* es una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y considerando una matriz de incógnitas (soluciones) y a una matriz de constantes de igual orden, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el sistema de ecuaciones expresado como un producto de matrices $S: A.\,X = B$ con $Det(A) \neq 0$ o dicho de otra manera, $Rg(A) = n$, A es inversible y por la proposición previamente vista, podemos obtener la única solución pre-multiplicando miembro a miembro por A^{-1} de la misma manera que lo hicimos antes:
$A.X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}.A).X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad I_n.X = A^{-1}.B$ y por lo tanto la solución es $X = A^{-1}.B$.
Esta solución es independiente de la matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, puesto que el despeje de $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ depende sólo de A.

Ejemplos:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = -1 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 25 \\ -31 & 18 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = 2 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ \frac{23}{2} & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = 3 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ \frac{22}{3} & 2 & \frac{28}{3} \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = -6 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = -2 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -4 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A no es inversible o bien no es cuadrada, el sistema $S: A.X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ se debe resolver por los métodos de triangulación de Gauss o pivoteo de Gauss-Jordan:

<u>Ejemplos</u>:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = 0$

Como la matriz A no es inversible, la ecuación matricial no tiene única solución. Debemos utilizar otro método.

Si multiplicamos A por la primera columna de X nos da por resultado la primera columna de B; si multiplicamos A por la segunda columna de X nos da por resultado la segunda columna de B y si multiplicamos A por la tercera columna de X nos da por resultado la tercera columna de B: Entonces podríamos considerar que tenemos tres sistemas de ecuaciones lineales: $S_1 : A.X^1 = B^1$; $\quad S_2 : A.X^2 = B^2$ y $\quad S_3 : A.X^3 = B^3$ y como todos tienen la misma matriz asociada A, resolverlos simultáneamente, por ejemplo, por el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para S_1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_{11} + x_{31} = 2 \\ x_{21} + x_{31} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 2 - x_{31} \\ x_{21} = 2 - x_{31} \end{cases}$

Para S_2: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_{12} + x_{32} = 4 \\ x_{22} + x_{32} = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = 4 - x_{32} \\ x_{22} = -5 - x_{32} \end{cases}$

Para S_3: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_{13} + x_{33} = -3 \\ x_{23} + x_{33} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = -3 - x_{33} \\ x_{23} = 6 - x_{33} \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} 2 - x_{31} & 4 - x_{32} & -3 - x_{33} \\ 2 - x_{31} & -5 - x_{32} & 6 - x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

SCI

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ -1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = 0$

Como la matriz A no es inversible, la ecuación matricial no tiene única solución. Debemos utilizar otro método. Al igual que en el caso anterior, podríamos considerar que tenemos tres sistemas de ecuaciones lineales: $S_1 : A.X^1 = B^1$; $S_2 : A.X^2 = B^2$ y $S_3 : A.X^3 = B^3$ y como todos tienen la misma matriz asociada A, resolverlos simultáneamente. Por ejemplo, por el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -11 & 14 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & 14 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{18}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -5 & 5 & -11 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para S_1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & -5 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_{11} + x_{31} = \frac{3}{5} \\ -5x_{21} - 5x_{31} = -11 \\ 0 = 5 \end{cases}$ Absurdo

Como S_1 es un sistema que no tiene solución, entonces no existe $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique $A.X = B$, es un **SI.**

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Vamos a considerar que tenemos tres sistemas de ecuaciones lineales: $S_1 : A.X^1 = B^1$; $S_2 : A.X^2 = B^2$ y $S_3 : A.X^3 = B^3$ y como todos tienen la misma matriz asociada A, resolverlos simultáneamente. Por ejemplo, por el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Para S_1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} - x_{31} = 4 \\ 0 = -6 \end{cases}$ Absurdo

Como S_1 es un sistema que no tiene solución, entonces no existe $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique $A.X = B$, es un **SI.** (En este caso sucede lo mismo con S_2 y con S_3)

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Vamos a considerar que tenemos tres sistemas de ecuaciones lineales: $S_1 : A.X^1 = B^1$; $S_2 : A.X^2 = B^2$ y $S_3 : A.X^3 = B^3$ y como todos tienen la misma matriz asociada A, resolverlos simultáneamente. Por el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Para S_1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_{11} - x_{31} = 1 \\ 5x_{21} + 5x_{31} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 1 + x_{31} \\ x_{21} = 1 - x_{31} \end{cases}$

Para S_2: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_{12} - x_{32} = -\frac{2}{5} \\ 5x_{22} + 5x_{32} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = -\frac{2}{5} + x_{32} \\ x_{22} = \frac{4}{5} - x_{32} \end{cases}$

Para $S_3: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_{13} - x_{33} = -\frac{6}{5} \\ 5x_{23} + 5x_{33} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = -\frac{6}{5} + x_{33} \\ x_{23} = -\frac{3}{5} - x_{33} \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} 1+x_{31} & -\frac{2}{5}+x_{32} & -\frac{6}{5}+x_{33} \\ 1-x_{31} & \frac{4}{5}-x_{32} & -\frac{3}{5}-x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \qquad \textbf{SCI}$$

Método de Cramer:

Dado el sistema de ecuaciones lineales cuadrado con n incógnitas cuya *matriz asociada* es $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y considerando el vector de incógnitas (soluciones) y al vector de constantes como las matrices columna $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, como el sistema de ecuaciones cuadrado expresado como un producto de matrices es $S: A.X = B$, entonces si $Det(A) \neq 0$ o dicho de otra manera, $Rg(A) = n$, A es inversible, y por el método matricial vimos que $X = A^{-1}.B$. Además, sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \mathcal{Adj}(A)$ y que $\mathcal{Adj}(A) = (\mathcal{C}(A))^t$ entonces:

$$X = A^{-1}.B$$

$$X = \left(\frac{1}{Det(A)} \cdot \mathcal{Adj}(A)\right).B$$

$$X = \frac{1}{Det(A)} \cdot (\mathcal{Adj}(A).B)$$

$$X = \frac{1}{Det(A)} \cdot \left((\mathcal{C}(A))^t.B\right)$$

$$X = \frac{1}{Det(A)} \cdot \left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \frac{1}{Det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \cdots + c_{n1}b_n \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \cdots + c_{n2}b_n \\ \\ c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \cdots + c_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Si llamamos $\mathcal{A}_j$ a la matriz que cambia la $j-ésima$ columna A por B y calculamos el determinante de $\mathcal{A}_j$ a través de esta $j-ésima$ columna, necesitamos calcular los cofactores de los elementos de esta columna, que coinciden con los cofactores de los elementos de la misma columna de A ya que todos los demás elementos de A no se cambian:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ldots; \quad \mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos en el vector de soluciones, que el vector que multiplica al escalar $\left(Det(A)\right)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} Det(\mathcal{A}_1) \\ Det(\mathcal{A}_2) \\ \vdots \\ Det(\mathcal{A}_n) \end{pmatrix}$ y por lo tanto $X = \dfrac{1}{Det(A)} \cdot \begin{pmatrix} Det(\mathcal{A}_1) \\ Det(\mathcal{A}_2) \\ \vdots \\ Det(\mathcal{A}_n) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \begin{pmatrix} Det(\mathcal{A}_1) \\ Det(\mathcal{A}_2) \\ \vdots \\ Det(\mathcal{A}_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Det(\mathcal{A}_1)}{Det(A)} \\ \dfrac{Det(\mathcal{A}_2)}{Det(A)} \\ \vdots \\ \dfrac{Det(\mathcal{A}_n)}{Det(A)} \end{pmatrix} \text{ y por lo tanto } x_j = \frac{Det(\mathcal{A}_j)}{Det(A)} \quad \forall \quad 1 \le j \le n$$

Para resolver un sistema de orden n por este método, es necesario calcular $n+1$ determinantes de orden n, lo cual lo hace muy trabajoso. Sin embargo, es necesario saber utilizarlo puesto que para resolver modelos macroeconómicos, cuyos coeficientes son indeterminadas, el método de Cramer nos permite hallar sólo la incógnita necesaria de manera "mecánica" y eficiente.

Como mencionamos antes, este método sólo se puede utilizar si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz inversible, es decir, sólo si es un sistema cuadrado y **SCD**.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = -1 \neq 0$ se puede utilizar el método de Cramer

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-8}{-1} = 8 \\ \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow x_2 = \dfrac{18}{-1} = -18 \end{array}\right\} \quad S = \{(8; -18)\}$$

2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Det(A) = 10 \neq 0$ se puede utilizar el método de Cramer

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow x_1 = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5} \\ \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow x_2 = \dfrac{13}{10} \end{array}\right\} \quad S = \left\{\left(\frac{6}{5}; \frac{13}{10}\right)\right\}$$

3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $Det(A) = 16 \neq 0$ se puede utilizar el método de Cramer

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_1) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 55 \Rightarrow x_1 = \frac{55}{16} \\ \mathcal{A}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{16} \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow x_3 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \end{aligned}\right\} S = \left\{\left(\frac{55}{16}; \frac{9}{16}; \frac{9}{4}\right)\right\}$$

4) $\begin{cases} x_1 + \quad + x_3 = 5 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 - x_2 \quad = 2 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $Det(A) = 4 \neq 0$ se puede utilizar el método de Cramer

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_1) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{4} \\ \mathcal{A}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -17 \Rightarrow x_2 = -\frac{17}{4} \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Det(\mathcal{A}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow x_3 = \frac{11}{4} \end{aligned}\right\} S = \left\{\left(\frac{9}{4}; -\frac{17}{4}; \frac{11}{4}\right)\right\}$$

Matriz inversa, cálculo por Gauss o Gauss – Jordan:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sabemos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ existe una matriz a la que notaremos $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que verifique $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$. Si A^{-1} existe, es única por definición de elemento inverso.

Por otra parte, también sabemos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$

Busquemos A^{-1}. Como aún no la conocemos, es una matriz incógnita que verifica $A.A^{-1} = I_n$, entonces $A^{-1} = X$, partamos de acá:

$A.A^{-1} = I_n$

$A.X = I_n$

Ejemplos:

1) Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ busquemos $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ que verifique $A.X=I_2$

$$A.X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.X=\begin{pmatrix} 2x_{11}-x_{21} & 2x_{12}-x_{22} \\ -3x_{11}+2x_{21} & -3x_{12}+2x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_{11}-x_{21} & & =1 \\ & 2x_{12}-x_{22} & =0 \\ -3x_{11}+2x_{21} & & =0 \\ & -3x_{12}+2x_{22} & =1 \end{cases}$$

Incógnitas $x_{11} \wedge x_{21}$

Incógnitas $x_{12} \wedge x_{22}$

Como dos de las ecuaciones tiene solamente las mismas dos incógnitas y las otras dos ecuaciones tienen las otras dos incógnitas, podemos resolver dos sistemas de orden 2, que es más sencillo:

$$\begin{cases} 2x_{11}-x_{21}=1 \\ -3x_{11}+2x_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_{12}-x_{22}=0 \\ -3x_{12}+2x_{22}=1 \end{cases} \Rightarrow A''=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ambos sistemas tienen la misma matriz asociada, entonces se pueden resolver simultáneamente los dos sistemas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \underset{(-1).F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Esto significa:

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_{11}=2 \\ x_{21}=3 \end{cases} \quad \text{Primera columna de } A^{-1}$$

$$A''=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_{12}=1 \\ x_{22}=2 \end{cases} \quad \text{Segunda columna de } A^{-1}$$

Por lo tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, partimos de $\left(\underbrace{\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I_2}\right)$ y llegamos a $\left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I_2} \middle| \underbrace{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$

En general:

Si multiplicamos A por la primera columna de X nos da por resultado la primera columna de I_n; si multiplicamos A por la segunda columna de X nos da por resultado la segunda columna de I_n y así sucesivamente con cada columna hasta que si multiplicamos A por la $n-ésima$ columna de X nos da por resultado la $n-ésima$ columna de I_n: Entonces podríamos considerar que tenemos n sistemas cuadrados de ecuaciones lineales de orden n:

$S_1 : A.X^1 = I_n^{\ 1}$; $S_2 : A.X^2 = I_n^{\ 2}$; $\cdots$; $S_n : A.X^n = I_n^{\ n}$ y como todos tienen la misma matriz asociada A, resolverlos simultáneamente para hallar $X = A^{-1}$, partiendo de $\left(A \mid I_n\right)$ y llegando a $\left(I_n \mid A^{-1}\right)$ mediante operaciones de filas (Gauss y/o Gauss – Jordan).

Dado que esta situación se da siempre que buscamos la inversa, directamente empezamos por $\left(A \mid I_n\right)$ y operamos hasta llegar a $\left(I_n \mid A^{-1}\right)$ y ya tenemos A^{-1}.

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -22 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -22 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & -22 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\left(-\frac{1}{22}\right).F_2}{\overset{(-1).F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{22} & -\frac{5}{22} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{11} & -\dfrac{1}{11} \\ -\dfrac{1}{22} & -\dfrac{5}{22} \end{pmatrix}$$

3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{4} \\ -4 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{4} \\ -4 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{12}{5} & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1 \to F_2 \\ F_2 \to F_3 \\ F_3 \to F_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{12}{5} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right) \underset{\frac{2}{5}.F_3}{\overset{\left(-\frac{1}{4}\right).F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{4}.F_4}{\overset{\frac{1}{2}.F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz E no es inversible ya que es de orden 3 pero su rango es 2. Como sistema de ecuaciones, es un sistema incompatible.
Si no se halló el determinante de una matriz, a una expresión de este tipo se llega si se comienza a buscar la inversa de una matriz que no es inversible.

Proposición:

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sea $B \in \mathbb{R}^m$. Consideremos los siguientes conjuntos: $\mathbb{S}_B = \left\{X \in \mathbb{R}^n \,/\, A.X = B\right\}$ es el conjunto de soluciones del sistema $A.X = B$ y $\mathbb{S}_0 = \left\{X \in \mathbb{R}^n \,/\, A.X = N\right\}$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado $A.X = N$, entonces:

a) Si $X \in \mathbb{S}_0$ e $Y \in \mathbb{S}_0$ entonces $X + Y \in \mathbb{S}_0$
La suma de dos soluciones de un sistema homogéneo también es solución del sistema homogéneo.

b) Si $X \in \mathbb{S}_0$ entonces $\lambda.X \in \mathbb{S}_0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
El producto por cualquier escalar de una solución de un sistema homogéneo también es solución del sistema homogéneo.

c) Si $X \in \mathbb{S}_B$ e $Y \in \mathbb{S}_B$ entonces $X - Y \in \mathbb{S}_0$
La diferencia de dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

d) Si $X_1 \in \mathbb{S}_B$ entonces $\mathbb{S}_B = X_1 + \mathbb{S}_0 = \left\{Y \in \mathbb{R}^n \,/\, Y = X_1 + X,\ \text{con } X \in \mathbb{S}_0\right\}$
Las soluciones del sistema no homogéneo son suma de las soluciones del sistema homogéneo asociado con una solución particular del sistema no homogéneo.

La demostración de esta proposición se encuentra en el apéndice.

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + 6x_2 = -9 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{x_1 - 2x_2 = 3\right. \qquad \textbf{SCI}$$

Soluciones: $(3 + 2x_2; x_2) = (3;0) + (2x_2; x_2)$ si separamos en las soluciones las constantes de la parte que tiene el parámetro libre. Este segundo sumando son las soluciones del sistema homogéneo.

$\mathbb{S}_B = \left\{(3 + 2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(3;0) + (2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathbb{S}_0 = \left\{(2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases}$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ 0 = 5 \ \textbf{Absurdo} \end{cases} \qquad \textbf{SI}$$

$\mathbb{S}_B = \varnothing$

Sin embargo, siempre los sistemas homogéneos son compatibles:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{2x_1 = 4x_2\right. \Rightarrow \left\{x_1 = 2x_2\right.$$

$\mathbb{S}_0 = \left\{(2x_2; x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

3) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=6 \\ x_1-3x_2+x_3=3 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -4 & 12 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x_3=21 \\ 2x_2=0 \\ x_1=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-21 \\ x_2=0 \\ x_1=24 \end{cases} \quad \textbf{SCD}$$

$\mathbb{S}_B=\{(24;0;-21)\}$

$\mathbb{S}_0=\{(0;0;0)\}$

Siempre que un sistema no homogéneo sea un **SCD**, la solución del sistema homogéneo asociado es la trivial.

4) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=9 \\ -2x_1+x_2 \qquad =1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_3=-11 \\ x_2-4x_3=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-11+2x_3 \\ x_2=-21+4x_3 \end{cases} \quad \textbf{SCI}$$

Soluciones: $(-11+2x_3;-21+4x_3;x_3)=(-11;-21;0)+(2x_3;4x_3;x_3)$ separando las soluciones constantes de la parte que tiene el parámetro libre. Este segundo sumando son las soluciones del sistema homogéneo.

$\mathbb{S}_B=\{(-11+2x_3;-21+4x_3;x_3):x_3\in\mathbb{R}\}=\{(-11;-21;0)+(2x_3;4x_3;x_3):x_3\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{S}_0=\{(2x_3;4x_3;x_3):x_3\in\mathbb{R}\}$

5) $\begin{cases} 3x_1+6x_2-3x_3=9 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=6 \\ -x_1-2x_2+x_3=-3 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \{-x_1-2x_2+x_3=-3$$

$$\Rightarrow \{x_3=-3+x_1+2x_2 \qquad \textbf{SCI}$$

Soluciones: $(x_1;x_2;-3+x_1+2x_2)=(0;0;-3)+(x_1;0;x_1)+(0;x_2;2x_2)$ separando las soluciones constantes de la parte que tiene parámetros libres y también los de distinto parámetro libre. Este segundo sumando son las soluciones del sistema homogéneo.

$\mathbb{S}_B=\{(x_1;x_2;-3+x_1+2x_2):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}=\{(0;0;-3)+(x_1;0;x_1)+(0;x_2;2x_2):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{S}_0=\{(x_1;0;x_1)+(0;x_2;2x_2):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}$

6) $\begin{cases} 2x_1+6x_2=6 \\ x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+2x_2=10 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_2=-2 \\ x_1=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=-1 \\ x_1=6 \end{cases} \qquad \textbf{SCD}$$

$\mathbb{S}_B=\{(6;-1)\}$

$\mathbb{S}_0=\{(0;0)\}$

Siempre que un sistema no homogéneo sea un **SCD**, la solución del sistema homogéneo asociado es la trivial.

7) $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 4x_1-x_2=5 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -13 & 0 & -19 \\ 14 & 0 & 19 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\frac{19}{14} \\ 14 & 0 & 19 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \quad \textbf{Absurdo} \quad \textbf{SI}$$

$\mathbb{S}_B=\varnothing$

Sin embargo, siempre los sistemas homogéneos son compatibles, hay que resolverlo:

$$\begin{cases} 14x_1=0 \\ -x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$$

$\mathbb{S}_0=\{(0;0)\}$

8) $\begin{cases} 2x_1-4x_2=2 \\ -3x_1+6x_2=-3 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{x_1-2x_2=1 \Rightarrow \{x_1=1+2x_2 \qquad \textbf{SCI}$$

Soluciones: $(1+2x_2;x_2)=(1;0)+(2x_2;x_2)$ separando las soluciones constantes de la parte que tiene el parámetro libre. Este segundo sumando son las soluciones del sistema homogéneo.

$\mathbb{S}_B=\{(1+2x_2;x_2):x_2\in\mathbb{R}\}=\{(1;0)+(2x_2;x_2):x_2\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{S}_0=\{(2x_2;x_2):x_2\in\mathbb{R}\}$

Como se puede ver a través de los ejemplos:
- Si un sistema es **SCD**, entonces el sistema homogéneo asociado también es un **SCD**, por lo tanto, su solución es la trivial.
- Si un sistema es **SCI**, entonces el sistema homogéneo asociado también es un **SCI**, por lo tanto, su solución es no trivial, es la parte que tiene el parámetro libre en las soluciones del no homogéneo.
- Si un sistema es **SI**, entonces el sistema homogéneo asociado puede ser un **SCD**, por lo tanto, su solución es la trivial o bien, un **SCI**, por lo tanto, su solución es no trivial y hay que hallarla.

Sistemas paramétricos:

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se domina *paramétrico* si entre los coeficientes hay indeterminadas. El objetivo en este tipo de sistemas es analizar para qué valores del parámetro, el sistema de ecuaciones es un **SCD**, un **SCI** o un **SI**.

En todos los casos, se puede utilizar el método de Gauss o Gauss – Jordan para hallar una matriz equivalente a la matriz ampliada del sistema, siempre que no se utilice una expresión que contenga al parámetro como pivote en el caso de Gauss- Jordan ni se multiplique alguna fila por una expresión que contenga al parámetro en el caso de Gauss, ya que dicha expresión podría ser nula para algún valor del parámetro.
Una vez hallada la matriz equivalente se utiliza el Teorema de Rochè – Frobenius para analizar todos los casos posibles de rango de la matriz asociada y se compara con el rango de la matriz ampliada y con la cantidad de incógnitas para tomar decisiones respecto a los valores de los parámetros.

Si el sistema es cuadrado, es más sencillo trabajar con determinantes:
Si el sistema es un **SCD**, entonces el determinante de la matriz asociada al sistema es no nulo, entonces se buscan aquellos valores del parámetro que hacen que el determinante no se anule.
Si el sistema es un **SCI** o bien es un **SI**, entonces el determinante de la matriz asociada al sistema es nulo, entonces se buscan los valores de los parámetros que anulan al determinante. Ahora sólo falta decidir con cuál de dichos valores el sistema es un **SCI** o bien el sistema es un **SI**. Se reemplaza cada valor hallado y se resuelve por eliminación de Gauss o por Gauss – Jordan y el teorema de Roché Frobenuis nos indicará en qué situación estamos.

Ejemplos:
En cada caso, hallar los valores de los parámetros para los cuales cada sistema de ecuaciones tiene única solución (**SCD**), infinitas soluciones (**SCI**), o no tiene solución (**SI**):

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad x_3 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 + \left(k^2 - 5\right) x_3 = k + 1 \end{cases}$$

En este caso, el sistema es cuadrado, vamos a resolverlo mediante Gauss- Jordan y mediante determinantes:

a) Por el método de Gauss – Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & k^2-5 & k+1 \end{array}\right) \overset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-9 & k-3 \end{array}\right)$$

Ahora hagamos un análisis de las soluciones:

i) Si el $Rg(A)=3$, entonces $Rg(A)=Rg(A')=n=3$ es un **SCD**. $Rg(A)=3$ si $k^2-9\neq 0 \quad \Rightarrow \quad k\neq 3 \wedge k\neq -3$, entonces el sistema es un **SCD** $\quad \forall \quad k\in\mathbb{R}-\{3;-3\}$

ii) Si el $Rg(A)=2$, entonces $Rg(A)=Rg(A')=2$ es un **SCI**.

$Rg(A)=2$ si $k^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad k=3 \vee k=-3$,

$Rg(A')=2$ si $k^2-9=0 \wedge k-3=0 \quad \Rightarrow \quad (k=3\vee k=-3)\wedge(k=3)$ entonces el sistema es un **SCI** si $\quad k=3$

iii) Si el $Rg(A)=2$, entonces $Rg(A)\neq Rg(A')$ es un **SI**.

$Rg(A)=2$ si $k^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad k=3 \vee k=-3$, y

$Rg(A')=3$ si $k^2-9=0 \wedge k-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad (k=3\vee k=-3)\wedge(k\neq 3)$ entonces el sistema es un **SI** si $\quad k=-3$

b) Por determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 3 & \boxed{1} \\ 4 & 8 & \boxed{k^2-5} \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (k^2-5).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4-0-(k^2-5)=4-k^2+5$$

$Det(A)=9-k^2$

i) Si $Det(A)=9-k^2\neq 0$, el sistema es **SCD**:

$k^2-9\neq 0 \quad \Rightarrow \quad k\neq 3\wedge k\neq -3$ por lo tanto si $k\in\mathbb{R}-\{3;-3\}$, el sistema es **SCD**.

ii) Si $Det(A)=9-k^2=0$, el sistema puede ser **SCI** o bien **SI**.

$k^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad k=3\vee k=-3$

Analicemos cada caso:

(1) Para $k=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} Rg(A)=2 \\ Rg(A')=2 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{SCI}$$

(2) Para $k=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} Rg(A)=2 \\ Rg(A')=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{SI}$$

2) $\begin{cases} x_1-3x_2=1 \\ 2x_1+ax_2=b \end{cases}$

Como el sistema es cuadrado, vamos a resolverlo mediante determinantes:

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a+6$$

i) Si $Det(A)=a+6\neq 0$, el sistema es **SCD**:

$a+6\neq 0 \quad \Rightarrow \quad a\neq -6$, por lo tanto si $a\in\mathbb{R}-\{-6\}$ y $b\in\mathbb{R}$ el sistema es **SCD**.

ii) Si $Det(A)=a+6=0$, el sistema puede ser **SCI** o bien **SI**.

$a+6=0 \;\Rightarrow\; a=-6$

Analicemos este caso:

Si $a=-6$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & b \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

Entonces $Rg(A)=1$ y como $n=2$:

(1) Si $b-2=0 \;\Rightarrow\; b=2$ entonces $Rg(A')=1$. Por lo tanto, si $a=-6$ y $b=2$ el sistema es **SCI**.

(2) Si $b-2\neq 0 \;\Rightarrow\; b\neq 2$ entonces $Rg(A')=2$. Por lo tanto, si $a=-6$ y $b\neq 2$ el sistema es **SI**.

3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = b \\ (a+2)x_2 + (a^2-4)x_3 = b+3 \end{cases}$

En este caso, el sistema NO es cuadrado, vamos a resolverlo mediante Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+2 & a^2-4 & b+3 \end{array}\right)$$

La matriz A' ya está triangulada, así que se puede hacer un análisis de las soluciones:

i) Como $n=3$ y $Rg(A)\neq 3$, el sistema nunca es **SCD**

ii) Si el $Rg(A)=2$, entonces $Rg(A)=Rg(A')=2$ es un **SCI**, pero $Rg(A)=2$ si $a+2\neq 0 \;\vee\; a^2-4\neq 0$, entonces $a\neq -2 \;\vee\; (a\neq 2 \wedge a\neq -2) \;\Rightarrow\; a\neq -2$. Para $a\in\mathbb{R}-\{-2\}$ y $b\in\mathbb{R}$ el sistema sea un **SCI**.

iii) Si el $Rg(A)=1$, entonces $Rg(A)=Rg(A')=1$ es un **SCI**.

$Rg(A)=1$ si $a+2=0 \;\wedge\; a^2-4=0$, entonces $a=-2 \;\wedge\; (a=2 \wedge a=-2) \;\Rightarrow\; a=-2$

$Rg(A')=1$ si $a+2=0 \;\wedge\; a^2-4=0 \;\wedge\; b+3=0$ entonces $a=-2 \;\wedge\; (a=2 \vee a=-2) \;\wedge\; b=-3$. Para $a=-2$ y $b=-3$ el sistema es un **SCI**.

iv) Si el $Rg(A)=1$, pero $Rg(A)\neq Rg(A')$ es un **SI**.

$Rg(A)=1$ si $a+2=0 \;\wedge\; a^2-4=0$, entonces $a=-2 \;\wedge\; (a=2 \wedge a=-2) \;\Rightarrow\; a=-2$, y

$Rg(A')=2$ si $a=-2$ y $b+3\neq 0 \;\Rightarrow\; b\neq -3$, entonces el sistema es un **SI** si $a=-2$ y $b\neq -3$.

4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ (a+1)x_2 + (-a-1)x_3 = b+a \end{cases}$

Tenemos un sistema cuadrado, vamos a resolverlo por determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & a+1 & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1).\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-a-1).\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(a+1).3+(-a-1).(-3)=0$$

$Det(A)=0 \quad \forall\, a\in\mathbb{R}$

i) Nunca el sistema es **SCD**.

ii) Como $Det(A)=0$, el sistema puede ser **SCI** o bien **SI**.

Para decidir en qué situación estamos, necesitamos triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b+a \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b+a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & b+3a+2 \end{array}\right) \Rightarrow Rg(A)=2$$

(1) Si $Rg(A')=2 \Rightarrow b+3a+2=0 \Rightarrow b=-3a-2$. Por lo tanto, el sistema es **SCI** $\forall \; a\in\mathbb{R}$, con $b=-3a-2$

(2) Si $Rg(A')=3 \Rightarrow b+3a+2\neq 0 \Rightarrow b\neq -3a-2$. Por lo tanto, el sistema es **SI** $\forall \; a\in\mathbb{R}$, $\forall \; b\in\mathbb{R}$, con $b\neq -3a-2$

Como se puede ver a través de los ejemplos, para analizar cuáles deben ser los valores de los parámetros para que un sistema sea **SCD**, **SCI** o **SI**, cada caso es un caso particular y hay que analizarlo viendo todas las opciones posibles.

En esta asignatura, vamos a trabajar siempre con sistemas paramétricos cuadrados, y por lo tanto siempre vamos a calcular el determinante para analizar los valores que lo anulan (**SCI** o **SI**), pues para el resto el sistema es un **SCD**, para luego trabajar con un sistema de ecuaciones con coeficientes numéricos (reemplazando los valores que anulan el determinante) para decidir con cuáles son **SCI** y con cuáles son **SI**.

5) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5 \\ 3x_1+ax_2+x_3=3 \\ -x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$

Vamos a calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad -1} \\ 3 \quad a \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad a \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} -1.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)-(3a+1)-(3+a) = a^2-4a-5$$

$Det(A)=a^2-4a-5$

$a^2-4a-5=0 \Rightarrow a=5 \;\vee\; a=-1$

i) $Det(A)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 5 \;\wedge\; a\neq -1$, entonces el sistema es **SCD** $\forall \; a\in\mathbb{R}-\{5;-1\}$.

ii) Cuando $Det(A)=0$, el sistema puede ser **SCI** o bien **SI**, que se da cuando $a=5 \;\vee\; a=-1$.

Debemos analizar cada caso:

(1) Para $a=5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & 4 & 30 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array}\right)$$

$Rg(A)=2$ y $Rg(A')=3 \Rightarrow$ Para $a=5$ el sistema es un **SI**.

(2) Para $a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \underset{\sim}{G-J} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$Rg(A)=2$ y $Rg(A')=2$ $\Rightarrow$ Para $a=-1$ el sistema es un **SCI**.

Aplicaciones:

Como vimos en la introducción, las aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales se pueden dar en diversos temas de la vida cotidiana. Los vemos a través de los problemas matemáticos. Pero hay dos casos muy particulares de aplicaciones de sistemas de ecuaciones, que son las aplicaciones económicas: oferta y demanda e insumo-producto.

Ejemplos:

1) La suma de dos números es 11 y la diferencia entre el doble del primero y el segundo es 1, ¿cuáles son dichos números?

Para comenzar a resolver el problema debemos asignarle "nombre" a las incógnitas. Normalmente se utiliza x e y pero se podría utilizar cualquier letra.
Ahora debemos llevar los datos que tenemos a lenguaje simbólico:
- La suma de dos números es 11: $x+y=11$
- La diferencia entre el doble del primero y el segundo es 1: $2x-y=1$

Y ahora debemos buscar dos números que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones que quedaron determinadas, es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} x+y=11 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -21 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -21 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ -3y=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$

Veamos que se cumplen las condiciones:
$4+7=11$
$2.4-7=8-7=1$
Respuesta:
El primer número es 4 y el segundo es 7.

2) Una cadena de tiendas de ropa femenina muy importante tiene la misma cantidad de sucursales al norte y al sur del país. Luego de una serie de estudios de mercado llegaron a la conclusión que las tiendas del norte venden el doble de remeras que de pantalones, mientras que en las del sur sucede exactamente lo opuesto, venden el doble de pantalones que de remeras. Al comienzo de la temporada de verano, a todas las sucursales se les entregó la misma cantidad de prendas. Ya promocionaron las liquidaciones de fin de temporada, y sin embargo no cambió la tendencia. Como no pueden bajar más los precios, puesto que ya están casi al costo, y necesitan liquidar la producción de la temporada de verano, el departamento de relaciones públicas toma una decisión de mercado a futuro. La propuesta promocional es hacer un descuento del 40% en la primera compra de la temporada de invierno si las clientas compran un combo de prendas de la temporada de verano. El combo en las tiendas del norte está formado por dos pantalones y una remera a \$1020, mientras que el combo en las sucursales del sur está formado por dos remeras y un pantalón

por \$690. Los precios de las prendas son las mismas en todas las sucursales. Sólo acceden a la promoción aquellas clientas que adquieren el combo.

a) ¿Cuál es el precio de las remeras y cuál es el precio de los pantalones?
b) Suponiendo que las remeras en liquidación tuvieron un descuento del 20%, ¿cuál era el precio al principio de la temporada?
c) Suponiendo que los pantalones en liquidación tuvieron un descuento del 25%, ¿cuál era su precio al principio de la temporada?
d) Si la primera clienta que accede a la promoción compra prendas de la temporada de invierno por una suma de \$2400, ¿cuánto abonará?

Necesitamos saber los precios de las remeras y de los pantalones, que serán nuestras incógnitas:
r : precio de cada remera
p : precio de cada pantalón
Cuando los problemas están asociados a hechos de la vida cotidiana, se acostumbra llamar a las incógnitas con la inicial de lo que representa, pues de esta manera, al encontrar el valor de cada una ya se sabe qué representa en el problema, sin necesidad de releerlo para no confundirlas.
El combo en el norte está formado por dos pantalones y una remera a \$1020: $2p+1r=1020$
El combo en el sur está formado por dos remeras y un pantalón por \$690: $2r+p=690$
Como los precios de cada prenda es el mismo en todas las sucursales, debemos encontrar los valores de r y p que verifican ambas ecuaciones al mismo tiempo:
$\begin{cases} 2p+1r=1020 \\ 2r+p=690 \end{cases}$ reordenando para llevarlo a la forma convencional, $\begin{cases} 2p+1r=1020 \\ p+2r=690 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1020 \\ 1 & 2 & 690 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1020 \\ -3 & 0 & -1350 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 120 \\ -3 & 0 & -1350 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} r=120 \\ -3p=-1350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=120 \\ p=450 \end{cases}$

Veamos que los resultados obtenidos verifican las condiciones:
En el norte el precio de dos pantalones y una remera es $2.450+120=900+120=1020$
En el sur el precio de dos remeras y un pantalón es $2.120+450=240+450=690$

Respuesta:
a) El precio de las remeras es de \$120 cada una, mientras que el precio de cada pantalón es \$450.

Las remeras en liquidación tuvieron un descuento del 20%, entonces se paga el 80% por ellas, por lo tanto, sabemos que el 80% del precio al principio de la temporada es de \$120, en lenguaje simbólico: $0,80.R=120 \quad \Rightarrow \quad R=\dfrac{120}{0,80} \quad \Rightarrow \quad R=150$

Respuesta:
b) El precio al principio de la temporada de las remeras era \$150

Los pantalones en liquidación tuvieron un descuento del 25%, entonces se paga el 75% por ellos, Por lo tanto sabemos que el 75% del precio al principio de la temporada es \$450, en lenguaje simbólico: $0,75.P=450 \quad \Rightarrow \quad P=\dfrac{450}{0,75} \quad \Rightarrow \quad P=600$

Respuesta:
c) Al principio de la temporada, el precio de los pantalones era \$600

La primera clienta que accede a la promoción realiza una compra de prendas de la temporada de invierno por una suma de \$2400, de la que obtendrá un descuento del 40%, entonces abona el 60% de dicha suma, es decir, va a abonar: $0,60.2400 = 1440$

Respuesta:

d) La primera clienta que aprovecha la promoción abonará \$1440.

3) Martina y Pablo son hermanos. La edad de Martina es el triple de la de Pablo. Dentro de 5 años, la diferencia entre el doble de la edad de Pablo y la de Martina será 1. ¿Cuántos años se llevan?

Llevemos a lenguaje simbólico el enunciado. Dándole un nombre a las incógnitas:
M edad que tiene hoy Martina.
P edad que tiene hoy Pablo
Entonces:
La edad de Martina es el triple de la de Pablo: $M = 3.P$
Dentro de 5 años, ambos hermanos tendrán 5 años más, entonces la edad de Martina dentro de cinco años será $M+5$, mientras que la edad de Pablo dentro de cinco años será $P+5$, entonces, dentro de 5 años, la diferencia entre el doble de la edad de Pablo y la de Martina será 1: $2.(P+5)-(M+5)=1$

Y ahora debemos buscar las dos edades que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones que quedaron determinadas, es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} M = 3.P \\ 2.(P+5)-(M+5)=1 \end{cases} \quad \text{Ordenemos las incógnitas} \quad \begin{cases} M-3.P=0 \\ 2.P+10-M-5=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M-3.P=0 \\ 2.P-M+5=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M-3.P=0 \\ -M+2.P=-4 \end{cases} \text{ cuya matriz ampliada es: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} M=12 \\ -P=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=12 \\ P=4 \end{cases}$$

Veamos que estas dos edades verifican las condiciones:
La edad de Martina es el triple de la de Pablo: $12 = 3.4$
Dentro de 5 años, la diferencia entre el doble de la edad de Pablo y la de Martina será 1: $2.9-17=18-17=1$
Respuesta:
Martina y Pablo se llevan 8 años.

¡Siempre antes de una respuesta a un problema, lee la pregunta nuevamente, pues no necesariamente son los resultados calculados, como sucede en este problema!

4) Joaquín tiene en su alcancía 32 monedas de \$1, \$2 y \$0,50. En total tiene \$34. ¿Cuántas monedas de cada valor hay en la alcancía?

En la alcancía de Joaquín hay tres tipos de monedas distintas, entonces démosle un nombre a la cantidad de cada tipo de moneda:
x: cantidad de monedas de \$1.
y: cantidad de monedas de \$2
z: cantidad de monedas de \$0,50
Entonces llevemos a lenguaje simbólico los datos del problema:
En la alcancía hay 32 monedas: $x+y+z=32$
En la alcancía hay \$34: $1.x+2.y+0,50.z=34$
Hallemos los valores de las incógnitas que verifiquen ambas ecuaciones:

$\begin{cases} x \quad +y \qquad +z = 32 \\ 1.x + 2.y + 0,50.z = 34 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 1 & 2 & 0,5 & 34 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & -0,5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1,5 & 30 \\ 0 & 1 & -0,5 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 1,50z = 30 \\ y - 0,50z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 30 - 1,50z \\ y = 2 + 0,50z \end{cases}$

Matemáticamente, el sistema tiene infinitas soluciones, pero todas las soluciones no tienen sentido como respuesta del problema. Debemos analizar cuáles son las que sirven.

Condición: Como las incógnitas representan cantidades de monedas, deben ser números naturales, es decir deben ser enteros positivos (hay de los 3 tipos de monedas), entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow 30 - 1,50z > 0 \Rightarrow 30 > 1,50z \Rightarrow 20 > z \\ y > 0 \Rightarrow 2 + 0,50z > 0 \Rightarrow 0,50z > -2 \Rightarrow z > \dfrac{-2}{0,50} \Rightarrow z > -4 \\ z > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 < z < 20 \\ \text{o equivalentemente} \\ 1 \le z \le 19 \end{array}$$

Si $z =$	$\Rightarrow x = 30 - 1,50z$	$\Rightarrow y = 2 + 0,50z$	¿Es solución?
1	28,5	2,5	No
2	27	3	Si
3	25,5	3,5	No
4	24	4	Si
5	22,5	4,5	No
6	21	5	Si
7	19,5	5,5	No
8	18	6	Si
9	16,5	6,5	No
10	15	7	Si
11	13,5	7,5	No
12	12	8	Si
13	10,5	8,5	No
14	9	9	Si
15	7,5	9,5	No
16	6	10	Si
17	4,5	10,5	No
18	3	11	Si
19	1,5	11,5	No

Respuesta:

No se puede saber con exactitud cuántas monedas de cada tipo tiene Joaquín, pero todas las posibilidades son:

Monedas de \$1	Monedas de \$2	Monedas de \$0,50
27	3	2
24	4	4
21	5	6
18	6	8
15	7	10
12	8	12
9	9	14
6	10	16
3	11	18

Mercado de Competencia Perfecta - Oferta y Demanda:

Un mercado es una institución social en la que los bienes y servicios, así como los factores productivos, se intercambian libremente.
En el intercambio se utiliza dinero y existen dos tipos de agentes: consumidores y productores.
La economía de mercado, para desarrollar sus funciones, se basa en el libre juego de la *oferta* y la *demanda*. A nosotros nos interesa el estudio de la oferta y la demanda en un mercado para un bien determinado.
Para que un mercado sea considerado de *competencia perfecta* deben cumplirse simultáneamente las siguientes condiciones:
Atomicidad del mercado: La existencia de un elevado número de productores y consumidores, pequeños en relación con el mercado, de manera que ninguno pueda ejercer una influencia apreciable sobre los precios (los agentes son "precio aceptantes"). La existencia de un elevado número de oferentes y demandantes implica que la decisión individual de cada uno de los agentes no ejerce influencia sobre el mercado global.
Homogeneidad del bien: La homogeneidad del producto supone que no existen diferencias entre el producto que vende un oferente y el que venden los demás. Las empresas ofrecen un producto homogéneo en el mercado, por lo que al comprador le resulta indiferente un vendedor u otro.
Información perfecta: Las empresas y los consumidores tienen acceso a la información completa y gratuita. La transparencia del mercado requiere que todos los participantes tengan pleno conocimiento de las condiciones generales en que opera el mercado, todos los consumidores dispondrían de la misma información sobre los precios y las cantidades ofertadas de los bienes.
Libre accesibilidad al mercado: No deben existir barreras de entrada o salida al mercado. Esta libertad de entrada y salida de empresas permite que todas las empresas participantes puedan salir y entrar del mercado de forma inmediata en cuanto lo deseen, ya sea porque no obtiene beneficios (abandonará esta actividad) o la empresa podría acceder al mercado atraída por la existencia de altos beneficios.
Libre movilidad de los factores trabajo y capital: Los costos de transporte deben ser despreciables, de tal manera que si dos oferentes ofrecen producto homogéneo el consumidor puede acudir a cualquiera de ellos con la misma dificultad y empleando un tiempo y costos similares.
Beneficios extraeconómicos nulos a largo plazo: Sin costos de transacción, ni los compradores ni las empresas incurren en costos para la transacción de dichos bienes. Esto es importante porque significa que no habría diferencias en la elección de una u otra empresa basado en un costo adicional por adquirir un bien.

La esencia del mercado de competencia perfecta no se basa en la rivalidad sino en la dispersión de la capacidad del control que los agentes económicos pueden ejercer sobre el mecanismo del mercado. Cuanto más repartido esté el poder de influencia en las condiciones del mercado, menos eficaces serán las acciones discrecionales dirigidas a manipular la cantidad disponible de productos y los precios del producto.
Las condiciones teóricas son muy restrictivas y son muy pocos los bienes cuyos mercados las reúnen. Aun así, el modelo de competencia perfecta es útil porque muchos mercados se aproximan a la competencia perfecta y es posible realizar predicciones basándose en este modelo.
En los mercados de competencia perfecta las empresas que pretenden obtener mayores beneficios deben recurrir al máximo aprovechamiento de la tecnología, a incorporar los últimos avances en técnicas productivas. Por lo tanto, en una situación de competencia perfecta la búsqueda de mayores beneficios va asociada a la combinación más eficiente y rentable de los factores productivos y a la modernización tecnológica.

El modelo se basa en la relación entre el precio de un bien y las ventas del mismo. Se asume que en un mercado de competencia perfecta, el precio de mercado se establecerá en un punto, llamado *punto de equilibrio*, en el cual se produce un vaciamiento del mercado: todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha.

El postulado de la oferta y la demanda implica tres leyes:
- Cuando, dado el precio, la demanda excede la oferta, aumenta el precio. Inversamente, cuando la oferta excede la demanda, disminuye el precio.
- Un aumento en el precio disminuye la demanda y aumenta la oferta. Inversamente, una disminución en el precio aumenta la demanda y disminuye la oferta.
- El precio tiende al nivel en el cual la demanda iguala la oferta.

En economía el modelo generalmente se usa en conjunto con el tanteo walrasiano.

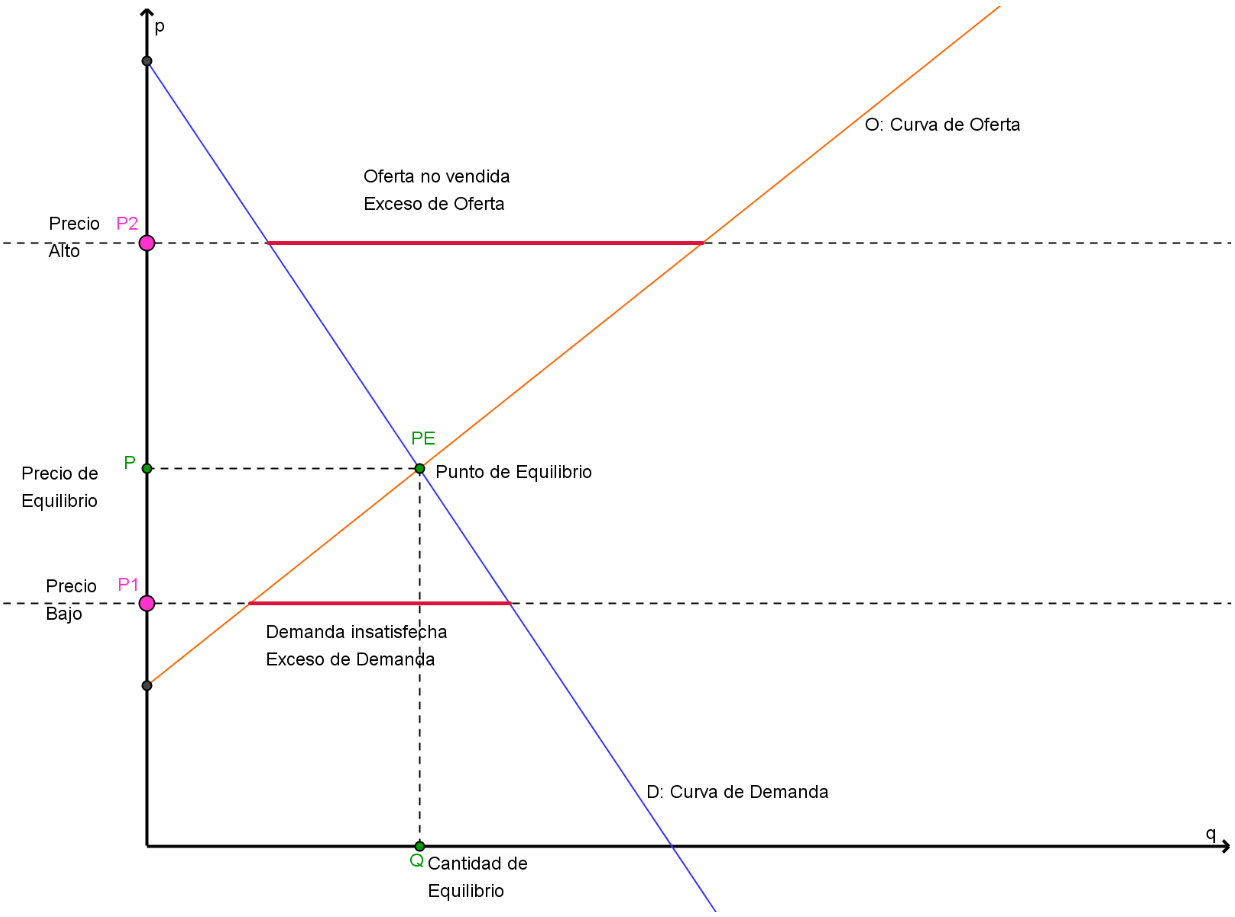
El modelo establece que en un mercado de competencia perfecta, la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos demandados por los consumidores dependen del precio de mercado del producto:

Ley de la oferta:
La cantidad ofrecida es lo que se está dispuesto a producir o vender a un precio unitario determinado. Indica que la oferta es directamente proporcional al precio, es decir, cuanto mayor sea el precio del producto, más unidades se ofrecerán a la venta. La pendiente de esta curva determina cómo aumenta o disminuye la cantidad ofrecida de un bien ante un aumento o una disminución del precio del mismo. Debido a que la oferta es proporcional al precio, las curvas de oferta son generalmente crecientes.
La función que representa la ley de la oferta será: $O: q_O = f(p)$ una función creciente y cóncava hacia arriba. Nosotros la trabajaremos como lineal. Si necesitamos graficarla, debido a que el eje de la variable independiente *"precio"* es vertical, graficaremos su inversa: $O: p = f^{-1}(q_O)$.

Ley de la demanda:
La cantidad demandada es lo que se está dispuesto a consumir a un precio unitario determinado.
Indica que la demanda es inversamente proporcional al precio por lo tanto, cuanto más alto sea el precio del bien, menos cantidad demandarán los consumidores. La curva de demanda es por lo general decreciente, es decir, a mayor precio, los consumidores comprarán menos. Los determinantes de la demanda del consumidor son el precio del bien, el nivel de renta, los gustos personales, el precio de los bienes sustitutos, y el precio de los bienes complementarios, pero en la curva de demanda, sólo se tiene en cuenta el precio del bien, ceteris paribus las demás variables.
Hay dos casos particulares de curvas de demanda que son crecientes: los bienes de Veblen (bienes de lujo) y los bienes de Giffen (bienes inferiores).
La función que representa la ley de la demanda será: $D: q_D = g(p)$ una función decreciente con bienes normales; no hay condiciones sobre la concavidad, depende del bien. Nosotros la trabajaremos como lineal. Si necesitamos graficarla, debido a que el eje de la variable independiente *"precio"* es vertical, graficaremos su inversa: $D: p = g^{-1}(q_D)$.

Equilibrio del mercado:
La oferta y la demanda hacen variar el precio del bien.
Según la ley de la oferta y la ley de la demanda, y asumiendo esa competencia perfecta, el precio del bien se encuentra en la intersección de las curvas de oferta y demanda.
Si el precio de un bien está demasiado bajo y los consumidores demandan más de lo que los productores colocan en el mercado, se produce una situación de escasez, y por tanto los consumidores estarán dispuestos a pagar más. Los productores subirán los precios hasta que se alcance el nivel al cual los consumidores no estén dispuestos a comprar más si sigue subiendo el precio.
Si el precio de un bien es demasiado alto y los consumidores demandan menos de lo que los productores colocan en el mercado, se produce una situación de exceso de oferta, hay productos que no se pueden vender pues los consumidores no están dispuestos a pagarlo, la tendencia será a que baje el precio, hasta que se llegue al nivel al cual los consumidores acepten el precio y se pueda vender todo lo que se produce.

Buscar el punto de equilibrio implica resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} O: q = f(p) \\ D: q = g(p) \end{cases}$ o equivalentemente, resolver el sistema $\begin{cases} O: p = f^{-1}(q) \\ D: p = g^{-1}(q) \end{cases}$



Ejemplos:

1) Si la ley de demanda de un determinado bien es $D: q = -\frac{3}{2}p + 5400$ y si la ley de oferta del mismo bien es $O: q = \frac{5}{6}p + 1200$

a) Hallar analítica y gráficamente el punto de equilibrio.
b) Calcular el exceso de demanda para $p = 1000$ y marcarlo en el gráfico.
c) Calcular el exceso de oferta para $p = 2900$ y marcarlo en el gráfico.

a) Para hallar analíticamente el punto de equilibrio, debemos resolver el sistema $\begin{cases} q = -\frac{3}{2}p + 5400 \\ q = \frac{5}{6}p + 1200 \end{cases}$

Como tenemos despejadas en ambas ecuaciones la incógnita q, igualemos y despejemos p:

$$-\frac{3}{2}p+5400=\frac{5}{6}p+1200$$

$$5400-1200=\frac{5}{6}p+\frac{3}{2}p$$

$$4200=\frac{7}{3}p$$

$$4200.\frac{3}{7}=p\Rightarrow\boxed{p=1800}$$

Reemplazando en las ecuaciones:

$$D:q=-\frac{3}{2}.p+5400$$

$$q=-\frac{3}{2}.1800+5400$$

$$q=2700$$

$$O:q=\frac{5}{6}.p+1200$$

$$q=\frac{5}{6}.1800+1200$$

$$\boxed{q=2700}$$

Para graficar, como p es variable dependiente, debemos despejarla en las dos ecuaciones:

$$D:q=-\frac{3}{2}p+5400$$

$$q-5400=-\frac{3}{2}p$$

$$(q-5400).\left(-\frac{2}{3}\right)=p$$

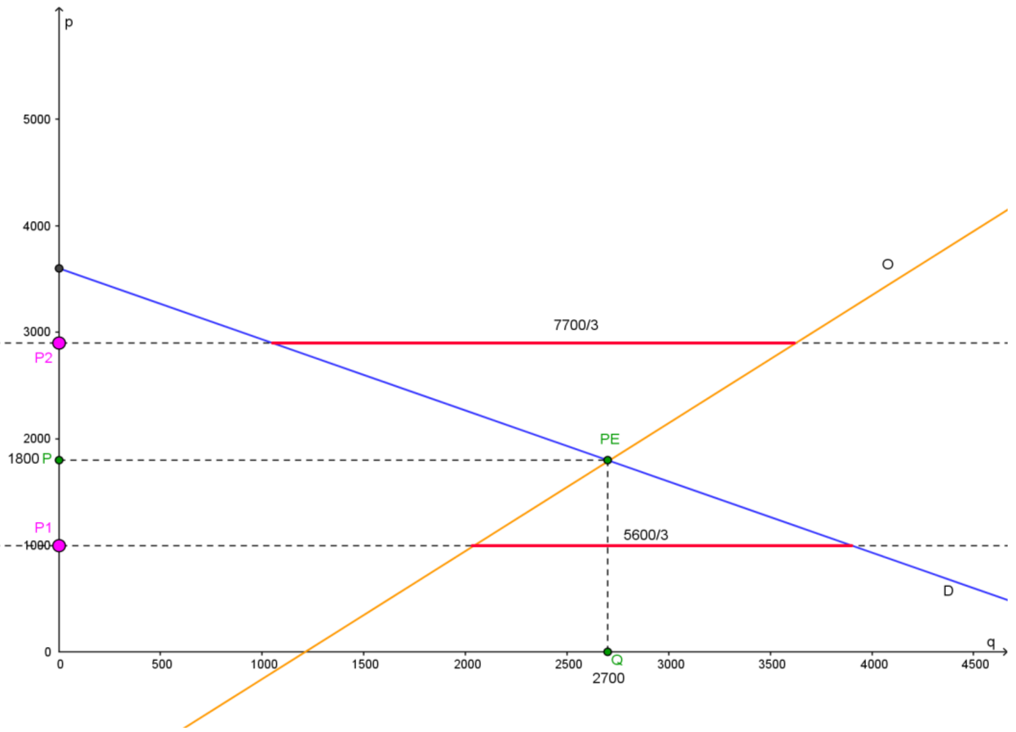
$$-\frac{2}{3}q+3600=p\Rightarrow\boxed{D:p=-\frac{2}{3}q+3600}$$

$$O:q=\frac{5}{6}p+1200$$

$$q-1200=\frac{5}{6}p$$

$$(q-1200).\frac{6}{5}=p$$

$$\frac{6}{5}q-1440=p\Rightarrow\boxed{O:p=\frac{6}{5}q-1440}$$



b) Debemos buscar el exceso de demanda para $p=1000$. Reemplacemos en ambas funciones $p=1000$

$$D:q=-\frac{3}{2}.p+5400$$

$$q=-\frac{3}{2}.1000+5400$$

$$q=3900$$

$$O:q=\frac{5}{6}.p+1200$$

$$q=\frac{5}{6}.1000+1200$$

$$q=\frac{6100}{3}$$

Exceso de Demanda:

$$ED=3900-\frac{6100}{3}=\frac{5600}{3}$$

c) Debemos buscar el exceso de oferta para $p = 2900$. Reemplacemos en ambas funciones

d) $p = 2900$

$D: q = -\frac{3}{2}.p + 5400$

$q = -\frac{3}{2}.2900 + 5400$

$q = 1050$

$O: q = \frac{5}{6}.p + 1200$

$q = \frac{5}{6}.2900 + 1200$

$q = \frac{10850}{3}$

Exceso de Oferta:

$EO = \frac{10850}{3} - 1050 = \frac{7700}{3}$

2) Sabiendo que la ley de oferta de un determinado producto es $O: p = \frac{1}{180}q + \frac{310}{9}$ y que la ley de demanda del mismo producto es $D: p = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}q$

a) Hallar analítica y gráficamente el punto de equilibrio.

b) Calcular el exceso de demanda para $p = 50$ y marcarlo en el gráfico.

c) Calcular el exceso de oferta para $p = 65$ y marcarlo en el gráfico.

a) Para hallar analíticamente el punto de equilibrio, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{1}{180}q + \frac{310}{9} \\ p = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}q \end{cases}$$

Como tenemos despejadas en ambas ecuaciones la incógnita p, igualemos y despejemos q:

$$\frac{1}{180}q + \frac{310}{9} = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}q$$

$$\frac{1}{180}q + \frac{1}{120}q = \frac{295}{3} - \frac{310}{9}$$

$$\frac{1}{72}q = \frac{575}{9}$$

$$q = \frac{575}{9}.72$$

$$\boxed{q = 4600}$$

Reemplazando en las ecuaciones:

$$D: p = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}q$$

$$p = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}.4600$$

$$p = 60$$

$$O: p = \frac{1}{180}q + \frac{310}{9}$$

$$p = \frac{1}{180}.4600 + \frac{310}{9}$$

$$\boxed{p = 60}$$

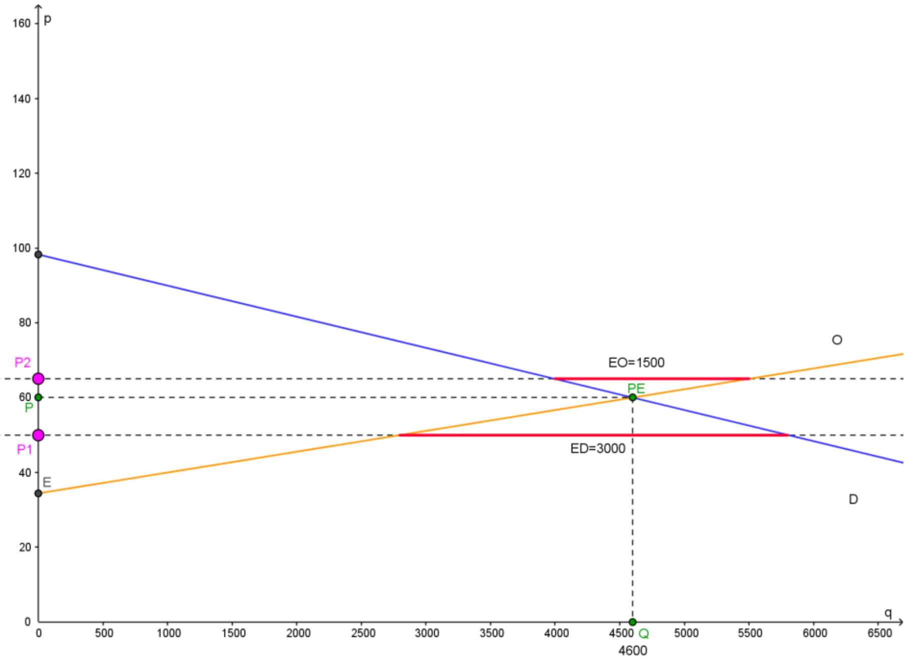
Para graficar, como p es variable dependiente, y en este caso, tenemos como dato en las dos leyes, a p en función de q, no es necesario buscar las funciones inversas.

Directamente, graficamos:

$$D: p = \frac{295}{3} - \frac{1}{120}q$$

y

$$O: p = \frac{1}{180}q + \frac{310}{9}$$



b) Debemos buscar el exceso de demanda para $p=50$. Reemplacemos en ambas funciones $p=50$ y despejemos q:

$$\begin{aligned} D: p&=\frac{295}{3}-\frac{1}{120}q \\ 50&=\frac{295}{3}-\frac{1}{120}q \\ \frac{1}{120}q&=\frac{295}{3}-50 \\ q&=\frac{145}{3}.120 \\ q&=5800 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} O: p&=\frac{1}{180}q+\frac{310}{9} \\ 50&=\frac{1}{180}q+\frac{310}{9} \\ 50-\frac{310}{9}&=\frac{1}{180}q \\ \frac{140}{9}.180&=q \\ q&=2800 \end{aligned}$$

Exceso de Demanda:
$ED=5800-2800=3000$

c) Debemos buscar el exceso de oferta para $p=65$. Reemplacemos en ambas funciones $p=65$ y despejemos:

$$\begin{aligned} D: p&=\frac{295}{3}-\frac{1}{120}q \\ 65&=\frac{295}{3}-\frac{1}{120}q \\ \frac{1}{120}q&=\frac{295}{3}-65 \\ q&=\frac{100}{3}.120 \\ q&=4000 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} O: p&=\frac{1}{180}q+\frac{310}{9} \\ 65&=\frac{1}{180}q+\frac{310}{9} \\ 65-\frac{310}{9}&=\frac{1}{180}q \\ \frac{275}{9}.180&=q \\ q&=5500 \end{aligned}$$

Exceso de Oferta:
$EO=5500-4000=1500$

6) Si la ley de demanda de un determinado bien es $D:6p+2q=32$ y si la ley de oferta del mismo bien es $O:2p-q=4$

a) Hallar analítica y gráficamente el punto de equilibrio.
b) Calcular el exceso de demanda para $p=3$ y marcarlo en el gráfico.
c) Calcular el exceso de oferta para $p=5$ y marcarlo en el gráfico.

a) Para hallar analíticamente el punto de equilibrio, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 6p+2q=32 \\ 2p-q=4 \end{cases}$$

Acá tenemos escrito el sistema de ecuaciones tradicional. Podemos plantear la matriz ampliada del sistema para resolverlo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 32 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 40 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 40 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 10p=40 \\ -q=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=4 \end{cases}$$

Para graficar, como p es variable dependiente, debemos despejarla en las dos ecuaciones:

$D: 6p+2q=32$

$6p+2q=32$

$6p=32-2q$

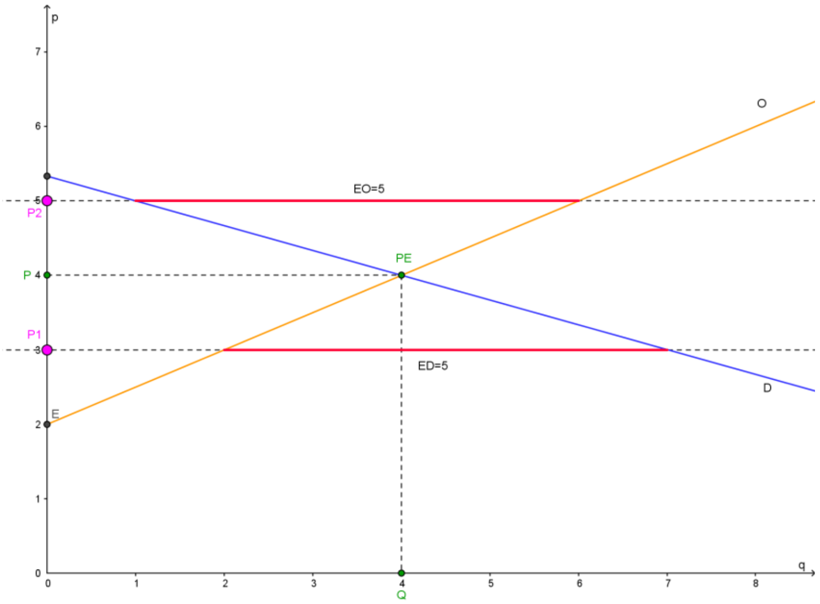
$p=\frac{1}{6}.(32-2q) \Rightarrow \boxed{D: p=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}q}$

$O: 2p-q=4$

$2p-q=4$

$2p=4+q$

$p=\frac{1}{2}.(4+q) \Rightarrow \boxed{O: p=2+\frac{1}{2}q}$



b) Debemos buscar el exceso de demanda para $p=3$. Reemplacemos en ambas ecuaciones $p=3$ y despejemos q:

$D: 6p+2q=32$

$6.3+2q=32$

$18+2q=32$

$2q=32-18$

$q=\frac{14}{2} \Rightarrow q=7$

$O: 2p-q=4$

$2.3-q=4$

$6-q=4$

$-q=4-6$

$q=\frac{-2}{-1} \Rightarrow q=2$

Exceso de Demanda: $ED=7-2=5$

c) Debemos buscar el exceso de oferta para $p=5$. Reemplacemos en ambas ecuaciones $p=5$ y despejemos q:

$D: 6p+2q=32$

$6.5+2q=32$

$30+2q=32$

$2q=2$

$q=1$

$O: 2p-q=4$

$2.5-q=4$

$10-q=4$

$-q=-6$

$q=6$

Exceso de Oferta: $EO=6-1=5$

Modelo abierto de Leontief – Matriz de Insumo-Producto :

Introducción:

El modelo de Leontief, también conocido como modelo *Input - Output*, es un modelo económico desarrollado por Wassily Leontief (1905-1999), basado en trabajos del siglo XVIII del francés Francisco Quesnay (escuela de los fisiócratas).
Leontief desarrolló y profundizó el análisis *input-output* o de *relaciones interindustriales* como método para explicar los flujos de mercancías en una economía y las relaciones entre las demandas finales y las diversas producciones requeridas para satisfacerlas (premio Nobel en 1973 por este trabajo).
El modelo consiste en un análisis de un conjunto de industrias interdependientes con el fin de averiguar los efectos que tendrían las variaciones en la producción de algunas de esas empresas sobre las demás.

Para que tenga sentido el modelo, cuando hablamos de una mercancía o servicio, estamos hablando de su equivalente en la unidad monetaria que corresponda, ya que esta es la única forma de poder relacionar las mercancías o servicios de todas y cada una de las industrias.

El modelo:

En su forma más simple el modelo de Leontief tiene, entre otras, las siguientes características:

1) Divide la economía en n sectores (que también denomina industrias), cada uno de los cuales produce una única mercancía (o servicio), esto es, establece una correspondencia biunívoca entre las industrias y las mercancías.
   Designaremos con x_i la cantidad de mercancía producida por el $i-ésimo$ sector durante un período de tiempo dado.

2) Distribuye el producto de cada sector en dos partes:
   a) Una sirve como insumo a las industrias (demanda interna). Estos usos los realizan los llamados sectores endógenos.
      Designaremos con x_{ij} la cantidad de mercancía producida por la industria i que sirve como insumo a la industria j.
   b) Otra va a las exportaciones, al consumo doméstico, a la construcción de nuevas plantas para la producción, exportaciones y a todo uso que no esté incluido como insumo para los sectores industriales (demanda externa). Estos usos los realizan los llamados sectores exógenos.
      Designaremos con d_i la cantidad de mercancía producida por la industria i que no se utiliza como insumo, es decir, d_i es la demanda externa o demanda final de la industria i.

   Supone que el producto de cada sector queda agotado por las compras de los sectores endógenos y exógenos en el período analizado. Para cada sector se puede pues, escribir la siguiente ecuación:

   $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i$ con $i = 1,2,3,...,n$. Esta ecuación se interpreta como:

   "El producto del sector i es igual a la demanda de los sectores endógenos (industrias) más la de los sectores exógenos (la demanda final)."

3) La cantidad de producto de la industria i necesaria para producir *una* unidad de mercancía de la industria j permanece constante. Esto es, la cantidad de la $i-ésima$ mercancía que se utiliza como insumo para producir *una unidad* de la $j-ésima$ mercancía es un parámetro del sistema (una magnitud exógena).

Si para producir x_j unidades, la industria j requiere x_{ij} unidades del producto de la industria i, entonces el cociente $\frac{x_{ij}}{x_j}$ permanece constante en determinado período de tiempo; a este cociente lo denotamos por c_{ij} y se denomina *coeficiente tecnológico*, que representa las unidades de producto de la industria i necesarias para producir *una* unidad de mercancía por la industria j.

Por lo tanto, el consumo que el sector j hace del producto del sector i es $c_{ij}x_j$ y, en consecuencia, en la ecuación anterior:

$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i$ si a cada término de la sumatoria la dividimos y multiplicamos por el correspondiente x_j, quedándonos:

$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j}.x_j + d_i$; reemplazamos $\frac{x_{ij}}{x_j} = c_{ij}$ y queda:

$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i$ para todo $1 \le i \le n$

Esta última expresión da lugar a un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 = x_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_2 = x_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n + d_n = x_n \end{cases}$$

que, empleando notación matricial, podemos escribir como:

$$\boxed{C.X + D = X}$$

donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el vector de las cantidades de producción, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, llamada matriz de *"coeficientes tecnológicos"*, *"matriz tecnológica"* o *"matriz de tecnología"* y $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ es el vector de las cantidades de la demanda externa o final.

Como la expresión c_{ij} permanece constante en determinado período de tiempo, la matriz tecnológica C permanece constante en determinado período de tiempo, en el cual no se produzcan cambios tecnológicos significativos, entonces, en general, nos interesa conocer cuál será la producción X de las empresas, conocida determinada demanda final D. Para ello, trabajemos el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial:

En la expresión

$$X = C.X + D$$ Restemos miembro a miembro $C.X$

$$X - C.X = C.X + D - C.X$$ Quedando

$$X - C.X = D$$ Sacando factor común X a derecha en el primer miembro, queda:

$$\left(I_n - C\right).X = D$$ I_n es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$

A la matriz $I_n - C$ se la conoce como *matriz de Leontief*, y se la nota $L = I_n - C$.
De esta manera, el sistema de ecuaciones queda expresado como $L.X = D$, un sistema de ecuaciones “tradicional”.

El sistema $L.X = D$ constituye el sistema básico de ecuaciones del análisis interindustrial de Leontief.

Por su naturaleza los coeficientes técnicos c_{ij} son no negativos y las demandas finales d_i son no negativas también. Así mismo, las cantidades producidas, x_i son también no negativas. Estas restricciones plantean el siguiente interrogante: ¿podemos asegurar que siempre existe una solución X del sistema $L.X = D$ para cualquier demanda final arbitraria no negativa D y que dicha solución es no negativa?

Sí, siempre es posible pues C es una matriz de Minkowski y los teoremas de Perron y Frobenuis garantizan que $L = I - C$ es una matriz inversible y además, que todos los coeficientes de su inversa son no negativos (temas que se justifican y desarrollan en Matemática para Economistas).

Volviendo al sistema $L.X = D$, si pre-multiplicamos por la inversa de la matriz de Leontief miembro a miembro, resolvemos el sistema por el método matricial, y tenemos:

$$L.X = D$$

$$L^{-1}.\left(L.X\right) = L^{-1}.D$$

$$\left(L^{-1}.L\right).X = L^{-1}.D$$

$$I_n.X = L^{-1}.D$$

$$\boxed{X = L^{-1}.D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \left(I_n - C\right)^{-1}.D}$$

Matriz de insumo producto:

Normalmente los datos se dan en forma de matriz y no como sistema de ecuaciones, ya que de esta manera se lleva un registro ordenado de las transacciones entre las industrias destinadas a la satisfacción de una demanda final.
Se llama matriz de *insumo – producto* a la matriz conformada por $S_1, S_2, \cdots, S_n$, el conjunto de las n industrias interdependientes, D el vector demanda final y X el vector producto total:

		Sectores industriales				Demanda final o externa	Producto total
		S_1	S_2	$\cdots$	S_n	$DF = D$	$P.T. = X$
Sectores industriales	S_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	d_1	x_1
	S_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	d_2	x_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$		
	S_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	d_n	x_n
Valor agregado	$V.A.$	VA_1	VA_2	$\cdots$	VA_n	$\sum_{j=1}^{n} VA_j$	
Producto total	$P.T. = X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Demanda interna
(de las industrias
para las industrias)

Producto Bruto
Interno: **P.B.I.**

Por filas: La suma de los elementos de cada fila $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, representa el producto total del sector i, siendo d_i la demanda externa o demanda final de la industria i (output total).

Por columnas: La suma de los elementos de cada columna representa $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + VA_j$, con $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, representa los costos totales del sector j, siendo VA_j el valor agregado de la industria j (costos de otros factores de la producción que no son insumos, como salarios, intereses, etc.), (input total).

Como analizamos anteriormente:
Si en cada una de las ecuaciones $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i$ a cada término de la sumatoria lo dividimos y multiplicamos por el correspondiente x_j, nos queda: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j} . x_j + d_i$; y si reemplazamos $\frac{x_{ij}}{x_j}$ por el coeficiente tecnológico que representa, c_{ij} y queda $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i$ para todo $1 \le i \le n$, que nos lleva a resolver el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 = x_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_2 = x_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n + d_n = x_n \end{cases}$$

que resolveremos en forma matricial como vimos anteriormente:

$$X = C.X + D$$
$$X - C.X = D$$
$$(I_n - C).X = D \qquad \text{Como } I_n - C = L$$
$$L.X = D$$
$$X = L^{-1}.D \qquad \text{O equivalentemente, } X = (I_n - C)^{-1}.D$$

Si dada una nueva demanda final para cada producto, D' queremos conocer la producción de todas las empresas, simplemente: $X' = L^{-1}.D'$ (equivalente a $X' = (I_n - C)^{-1}.D'$); y si queremos construir la nueva matriz de insumo producto, sólo debemos tener en cuenta que $c_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, el coeficiente tecnológico, que es constante en un período de tiempo, será $c_{ij} = \frac{x'_{ij}}{x'_j}$ y por lo tanto $x'_{ij} = c_{ij}.x'_j$.

Ejemplos:

1) Supongamos que tenemos una economía reducida que sólo tiene tres industrias: petróleo, electricidad y mantenimiento y producción de tuberías. La matriz de insumo – producto que muestra la relación de las transacciones entre las industrias, en miles, para cubrir determinada demanda está dada en el siguiente cuadro:

Industrias	***Petróleo P***	***Electricidad E***	***Tuberías T***	***Demanda Final (D)***	***Producción Total (X)***
Petróleo P	28	28	42	42	140
Electricidad E	56	112	28	84	280
Tuberías T	14	0	0	126	140
Valor Agregado (VA)	42	140	70	252	-
Producción Total (X)	140	280	140	-	560

a) Hallar la matriz de coeficientes tecnológicos
b) Hallar la matriz de Leontief.
c) Hallar la inversa de la matriz de Leontief.
d) Hallar la producción para una demanda final de 63000 para la industria petrolera, 126000 para la industria de electricidad y 105000 para mantenimiento y producción de cañerías.
e) Hallar la matriz de insumo producto para la producción hallada en (d).

f) Hallar la producción para una demanda final de 42000 para la industria petrolera, 105000 para la industria de electricidad y 105000 para mantenimiento y producción de cañerías.

g) Hallar la matriz de insumo producto para la producción hallada en (f).

Respuestas:

a) Como los elementos de la matriz de coeficientes tecnológicos son $c_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$, entonces:

$$c_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{\cancel{28}^{1}}{\cancel{140}_{5}};\qquad c_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{\cancel{28}^{1}}{\cancel{280}_{10}};\qquad c_{13}=\frac{x_{13}}{x_3}=\frac{\cancel{42}^{3}}{\cancel{140}_{10}};\qquad c_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{\cancel{56}^{2}}{\cancel{140}_{5}};$$

$$c_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=\frac{\cancel{112}^{2}}{\cancel{280}_{5}};\qquad c_{23}=\frac{x_{23}}{x_3}=\frac{\cancel{28}^{1}}{\cancel{140}_{5}};\qquad c_{31}=\frac{x_{31}}{x_1}=\frac{\cancel{14}^{1}}{\cancel{140}_{10}};\qquad c_{32}=\frac{x_{32}}{x_2}=\frac{0}{280}=0;$$

$$c_{33}=\frac{x_{33}}{x_3}=\frac{0}{140}=0$$

Por lo tanto, $C=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) La matriz de Leontief es $L=I_3-C$ en este caso, entonces:

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8 & -0,1 & -0,3\\ -0,4 & 0,6 & -0,2\\ -0,1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Buscamos la inversa de la matriz de Leontief por cualquiera de los dos métodos que vimos. Considerando que la matriz es de orden 3, y el tipo de coeficientes que tiene, la hallaremos por el método de Gauss- Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0,8 & -0,1 & -0,3 & 1 & 0 & 0\\ -0,4 & 0,6 & -0,2 & 0 & 1 & 0\\ -0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{G-J}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0,77 & -0,1 & 0 & 1 & 0 & 0,3\\ -0,42 & 0,6 & 0 & 0 & 1 & 0,2\\ -0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{(-10).F_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-7,7 & 1 & 0 & -10 & 0 & -3\\ -0,42 & 0,6 & 0 & 0 & 1 & 0,2\\ -0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{G-J}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-7,7 & 1 & 0 & -10 & 0 & -3\\ 4,2 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2\\ -0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{G-J}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \frac{2}{3}\\ 4,2 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{22}{21}\end{array}\right)\begin{array}{c}\left(\frac{1}{4,2}\right).F_2\to F_1\\ \sim\\ F_1\to F_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{5}{21} & \frac{10}{21} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{22}{21} \end{array}\right) \Rightarrow L^{-1} = \left(I_3 - C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{5}{21} & \frac{10}{21} \\ 1 & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{22}{21} \end{pmatrix}$$

d) Si la demanda final es de 63000 para la industria petrolera, de 126000 para la industria de electricidad y de 105000 para mantenimiento y producción de cañerías, entonces el vector demanda es:

$$D' = \begin{pmatrix} 63 \\ 126 \\ 105 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la producción, que es $X = L^{-1}.D'$, sería: $X = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{5}{21} & \frac{10}{21} \\ 1 & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{22}{21} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 63 \\ 126 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 364 \\ 122 \end{pmatrix}$

La producción de la industria petrolera sería de 170000, la de la industria de electricidad sería 364000 y la de mantenimiento y producción de cañerías sería 122000.

e) Como $c_{ij} = \dfrac{x'_{ij}}{x'_j}$ y por lo tanto $x'_{ij} = c_{ij}.x'_j$, tenemos:

$x'_{11} = 0,2.170 = 34$; $x'_{12} = 0,1.364 = 36,4$; $x'_{13} = 0,3.122 = 36,6$; $x'_{21} = 0,4.170 = 68$; $x'_{22} = 0,4.364 = 145,6$; $x'_{23} = 0,2.122 = 24,4$; $x'_{31} = 0,1.170 = 17$; $x'_{32} = 0.364 = 0$; $x'_{33} = 0.122 = 0$

	P	***E***	***T***	***D***	***X***
P	34	36,4	36,6	63	170
E	68	145,6	24,4	126	364
T	17	0	0	105	122
VA	51	182	61	294	-
X	170	364	122	-	656

f) Ahora, la nueva demanda final es de 42000 para la industria petrolera, de 105000 para la industria de electricidad y de 105000 para mantenimiento y producción de cañerías, entonces el vector demanda es:

$$D'' = \begin{pmatrix} 42 \\ 105 \\ 105 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la producción, que es $X = L^{-1}.D''$, sería: $X = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{5}{21} & \frac{10}{21} \\ 1 & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{22}{21} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 42 \\ 105 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 304,5 \\ 118,5 \end{pmatrix}$

La producción de la industria petrolera sería de 135000, la de la industria de electricidad sería 304500 y la de mantenimiento y producción de cañerías sería 118500.

e) Como $c_{ij} = \dfrac{x'_{ij}}{x'_j}$ y por lo tanto $x'_{ij} = c_{ij}.x'_j$, tenemos:

$x'_{11} = 0,2.135 = 27$; $x'_{12} = 0,1.304,5 = 30,45$; $x'_{13} = 0,3.118,5 = 35,55$; $x'_{21} = 0,4.135 = 54$; $x'_{22} = 0,4.304,5 = 121,8$; $x'_{23} = 0,2.118,5 = 23,7$; $x'_{31} = 0,1.135 = 13,5$; $x'_{32} = 0.304,5 = 0$; $x'_{33} = 0.118,5 = 0$

	P	**E**	**T**	**D**	**X**
P	27	30,45	35,55	42	135
E	54	121,8	23,7	105	304,5
T	13,5	0	0	105	118,5
VA	40,5	152,25	59,25	252	-
X	135	304,5	118,5	-	558

2) Considerando una economía donde se tienen en cuenta sólo las industrias alimenticias, de transporte y el trabajo humano. Un peso de trabajo producido requiere \$0,40 de transporte y \$0,20 de alimentos. Un peso de transporte insume \$0,50 de trabajo y \$0,30 de transporte. Y un peso de alimentos producidos requiere \$0,50 de trabajo, \$0,05 de transporte y 0,35 de alimentos. Si la demanda para el presente período es de \$10000 de trabajo, \$20000 de transporte y \$10000 de alimentos, encontrar la producción necesaria para satisfacer la demanda y confeccionar la matriz de insumo producto de la misma.

Respuesta:
Ahora tenemos de dato los coeficientes de la matriz de tecnología. Como los datos son los requerimientos de los distintos sectores, estos están dados por columnas:

$$C = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \text{Alimentos} & \text{Transporte} & \text{Trabajo} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,35 & 0 & 0,20 \\ 0,05 & 0,30 & 0,40 \\ 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Alimentos} \\ \text{Transporte} \\ \text{Trabajo} \end{array} \end{array}$$

mientras que el vector de demanda es $D = \begin{pmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 10000 \end{pmatrix}$

Buscamos la matriz de Leontief:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,35 & 0 & 0,20 \\ 0,05 & 0,30 & 0,40 \\ 0,50 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0 & -0,20 \\ -0,05 & 0,70 & -0,40 \\ -0,50 & -0,50 & 1 \end{pmatrix}$$

Y buscamos su inversa:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0,4 & 0,56 \\ 1 & 2,2 & 1,08 \\ 1,5 & 1,3 & 1,82 \end{pmatrix} \quad \text{Verifícala!!!!}$$

Entonces $X = \begin{pmatrix} 2 & 0,4 & 0,56 \\ 1 & 2,2 & 1,08 \\ 1,5 & 1,3 & 1,82 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33600 \\ 64800 \\ 59200 \end{pmatrix}$

Se deben producir \$33600 de alimentos, \$64800 de transporte y \$59200 de trabajo.

Como $c_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ y por lo tanto $x_{ij} = c_{ij}.x_j$, tenemos:

$x_{11} = 0,35.33600 = 11760$; $x_{12} = 0.64800 = 0$; $x_{13} = 0,20.59200 = 11840$;
$x_{21} = 0,05.33600 = 1680$; $x_{22} = 0,30.64800 = 19440$; $x_{23} = 0,40.59200 = 23680$;
$x_{31} = 0,50.33600 = 16800$; $x_{32} = 0,50.64800 = 32400$; $x_{33} = 0.59200 = 0$

	Alimento	***Transporte***	***Trabajo***	***D***	***X***
Alimento	11760	0	11840	10000	33600
Transporte	1680	19440	23680	20000	64800
Trabajo	16800	32400	0	10000	59200
VA	3360	12960	23680	40000	-
X	33600	64800	59200	-	157600

3) Si tenemos una economía cuyas industrias están basadas en la agricultura, la manufactura de productos y el trabajo. Un peso de producción agrícola requiere \$0,50 de agricultura, \$0,20 de productos manufacturados y \$1 de trabajo. Un peso de manufactura requiere \$0,80 de manufactura y \$0,40 de trabajo. Un peso de trabajo insume \$0,25 de producción agrícola y \$0,10 de productos manufacturados. Encontrar el vector de producción si la demanda externa es \$100 de productos agrícolas, \$500 de manufacturas y \$700 de trabajo y elaborar la matriz de insumo producto.

<u>Respuesta</u>:
Nuevamente tenemos de dato los coeficientes de la matriz de tecnología. Como los datos son nuevamente los requerimientos de los distintos sectores, estos están dados por columnas:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Agrícolas} & \text{Manufactura} & \text{Trabajo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,50 & 0 & 0,25 \\ 0,20 & 0,80 & 0,10 \\ 1 & 0,40 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Agrícolas} \\ \text{Manufactura} \\ \text{Trabajo} \end{array} \quad \text{mientras que el vector de demanda es } D = \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

Buscamos la matriz de Leontief:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,50 & 0 & 0,25 \\ 0,20 & 0,80 & 0,10 \\ 1 & 0,40 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 & 0 & -0,25 \\ -0,20 & 0,20 & -0,10 \\ -1 & -0,40 & 1 \end{pmatrix}$$

Y buscamos su inversa:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 5 \\ 30 & 25 & 10 \\ 28 & 20 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{Verifícala!!!!}$$

Entonces $X = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 5 \\ 30 & 25 & 10 \\ 28 & 20 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10100 \\ 22500 \\ 19800 \end{pmatrix}$

La industria agrícola debe producir \$10100, mientras que de manufacturas se debe producir \$22500 y \$19800 de trabajo.

Como $c_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ y por lo tanto $x_{ij} = c_{ij}.x_j$, tenemos:

$x_{11} = 0,50.10100 = 5050$; $x_{12} = 0.22500 = 0$; $x_{13} = 0,25.19800 = 4950$;
$x_{21} = 0,20.10100 = 2020$; $x_{22} = 0,80.22500 = 18000$; $x_{23} = 0,1.19800 = 1980$;
$x_{31} = 1.10100 = 10100$; $x_{32} = 0,40.22500 = 9000$; $x_{33} = 0.19800 = 0$

	Agrícola	***Manufactura***	***Trabajo***	***D***	***X***
Agrícola	5050	0	4950	100	10100
Manufactura	2020	18000	1980	500	22500
Trabajo	10100	9000	0	700	19800
VA	-7070	-4500	12870	1300	-
X	10100	22500	19800	-	52400

En el caso de la industria agrícola y manufacturera, el valor agregado es negativo. Esto se debe porque en estas industrias, el mismo sistema productivo insume un muy alto porcentaje de la producción respecto a la demanda externa. Es probable que se necesiten subsidios o des-ahorro para poder producir. A una economía de este tipo se la consideraría marginal, pues hay dos industrias que son deficitarias.

Hay algunos datos que se pueden obtener a partir de la matriz de coeficientes tecnológicos:

- La suma de todos los coeficientes de una columna j indica el costo de producir $1 de producto del sector S_j. Si esta suma es menor que 1, el sector S_j será productivo. Si esto sucede para *todas* las columnas de la matriz de tecnología, la economía será productiva.
- La suma de todos los coeficientes de una fila i indica el total de la producción del sector S_i para producir $1 de cada producto. Si esta suma es menor que 1, el sector S_i produce más de lo que consumen los sectores del mismo. Si esto sucede para *todas* las filas de la matriz de tecnología, la economía puede producir más de lo que consume internamente.

Teorema

Si la matriz de coeficientes tecnológicos C de una economía verifica una de las condiciones siguientes:

i) la suma de los coeficientes de cada columna es menor que 1, para todas las columnas de la matriz C,

ii) la suma de los coeficientes de cada fila es menor que 1, para todas las filas de la matriz C,

entonces la economía es productiva.

Esta es una condición suficiente, pero ninguna de ellas es una condición necesaria, como sucede en el ejemplo 3, donde la segunda fila suma 1,1. Además, la primera columna suma 1,7 mientras que la segunda columna suma 1,2. Y sin embargo, la economía es productiva pese a que tiene sectores que no lo son.

Teorema

Una matriz de coeficientes tecnológicos C de una economía es productiva sí, y sólo si, la inversa de la matriz de Leontief tiene todos sus coeficientes no negativos.
Es decir, si $\left(I_n - C\right)^{-1} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, la economía es productiva si $a_{ij} \ge 0 \quad \forall 1\le i\le n, \quad \forall 1\le j\le n$
Esta es una condición necesaria y suficiente para que la economía sea productiva.

En el ejemplo 3, podemos asegurar que la economía es productiva dado que $\left(I_n - C\right)^{-1}$ tiene todos sus coeficientes positivos. Sólo dos sectores no son productivos, pero sí lo es la economía en su conjunto.

Este teorema nos dice que si la economía es capaz de satisfacer una demanda externa positiva es capaz de abastecer cualquier demanda.

Para saber si la economía es productiva:

- Si la suma de los coeficientes de cada una de las columnas o de cada una de las filas es menor que 1. (condición suficiente)
- Si alguna fila o columna suma 1 o más de 1, si los coeficientes de la matriz $\left(I_n - C\right)^{-1}$ son todos no negativos. (condición necesaria y suficiente)

Si algún coeficiente de $\left(I_n - C\right)^{-1}$ es negativo, la economía no es productiva.