ÁLGEBRA – APUNTE TEÓRICO - UNIDAD TEMÁTICA Nº 2

Estructuras Algebraicas. Espacios vectoriales.

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 2

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Operación binaria:

Una operación binaria $*$ en un conjunto, es una regla que a cada par ordenado de elementos del conjunto le asigna un único elemento del conjunto. Dados dos elementos a y b, el elemento asignado por la operación binaria se nota $a*b$.

Ejemplos:

1) Si definimos en $\mathbb{N}$ la operación binaria $*$ por $a*b=\max\{a,b\}$, ($a*b$ es el máximo entre a y b), entonces:
   a) $3*10=10$
   b) $6*2=6$
   c) $4*4=4$

2) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=b$, entonces:
   a) $3*10=10$
   b) $6*2=2$
   c) $4*4=4$

3) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=a-b$, entonces:
   a) $3*10=-7$
   b) $6*2=4$
   c) $4*4=0$

Es importante considerar que la operación binaria se aplica a un par *ordenado* pues la operación puede o no depender del orden en que se den los elementos. Con los mismos ejemplos anteriores, pero cambiando el orden de los elementos:

1) Si definimos en $\mathbb{N}$ la operación binaria $*$ por $a*b=\max\{a,b\}$, entonces:
   a) $10*3=10$
   b) $2*6=6$
   c) $4*4=4$

   En este caso es indistinto el orden de los elementos, pues obtenemos los mismos resultados que antes.

2) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=b$, entonces:
   a) $10*3=3$
   b) $2*6=6$
   c) $4*4=4$

   En este caso ya no es indistinto el orden, pues cambian los resultados; (que algún par ordenado mantenga el resultado no es significativo, debería suceder con todos para asumir que no importa el orden).

3) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=a-b$, entonces:
   a) $10*3=7$
   b) $2*6=-4$
   c) $4*4=0$

En este caso tampoco es indistinto el orden, pues también cambian los resultados.

Definición de Conmutatividad:

Una operación binaria $*$ en un conjunto C se dice que es *conmutativa* si y sólo si $a*b=b*a$ para todo $a\in C$ y para todo $b\in C$

En los ejemplos anteriores, la operación binaria $a*b=\max\{a,b\}$ es conmutativa, mientras que las operaciones binarias $a*b=b$ y $a*b=a-b$ no lo son, como analizamos anteriormente.

Definición de Asociatividad:

Una operación binaria $*$ en un conjunto C se dice que es *asociativa* si y sólo si $a*b*c=(a*b)*c=a*(b*c)$ para todo $a\in C$, para todo $b\in C$ y para todo $c\in C$.

Ejemplos:

1) Si definimos en $\mathbb{N}$ la operación binaria $*$ por $a*b=\max\{a,b\}$, entonces:
   $3*10*5=(3*10)*5=10*5=10$
   $3*10*5=3*(10*5)=3*10=10$
   Esta operación es asociativa, pues se puede verificar que vale para todo $a\in\mathbb{N}$, para todo $b\in\mathbb{N}$ y para todo $c\in\mathbb{N}$.

2) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=b$, entonces:
   $3*10*5=(3*10)*5=10*5=5$
   $3*10*5=3*(10*5)=3*5=5$
   Esta operación es asociativa, pues se puede verificar que vale para todo $a\in\mathbb{Z}$, para todo $b\in\mathbb{Z}$ y para todo $c\in\mathbb{Z}$.

3) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ por $a*b=a-b$, entonces:
   $3*10*5=(3*10)*5=(-7)*5=-12$
   $3*10*5=3*(10*5)=3*5=-2$
   Esta operación no es asociativa

Definición de Grupo:

Sea G un conjunto, y sea $*$ una operación binaria en G. El conjunto G junto con la operación $*$ se dice que es un *grupo* si satisface los siguientes axiomas:

1) *Ley de composición interna (o ley de cierre):*
   Para todo $a\in G$ y para todo $b\in G$ existe un único $c\in G$ que verifique que $a*b=c$, es decir, la operación $*$ es una operación binaria.
2) *Propiedad asociativa:*
   Para todo $a\in G$, para todo $b\in G$ y para todo $c\in G$, $a*b*c=(a*b)*c=a*(b*c)$.
3) *Existencia de elemento neutro:*
   Existe un elemento $e\in G$ tal que $a*e=e*a=a$ para todo $a\in G$.
4) *Existencia de elemento simétrico:*
   Para todo $a\in G$ existe un elemento $a'\in G$ que verifica que $a*a'=a'*a=e$

Para indicar que G junto con la operación $*$ es un grupo, lo notamos como $(G;*)$.

Si además, se verifica:

5) Propiedad conmutativa:
Para todo $a \in G$ y para todo $b \in G$ se verifica $a*b=b*a$

se dice que el grupo $(G;*)$ es un *grupo abeliano* (por el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829))

Ejemplos:

1) $(\mathbb{Z};+)$ es un grupo abeliano.
2) $(\mathbb{N};+)$ no es grupo. No cumple con dos de los axiomas: No tiene elemento neutro, que en la adición es el 0 (cero), pues $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,.......\}$ y por lo tanto, tampoco tiene elemento simétrico.
Un conjunto que tiene definida una operación binaria cerrada (ley de composición interna) y que sólo verifica propiedad asociativa, se denomina *monoide*.
3) $(\mathbb{N}_0;+)$ no es grupo. No cumple con el último de los axiomas: Tiene elemento neutro pues es el número agregado al conjunto de los naturales, pero sigue sin tener elemento simétrico.
Un conjunto que tiene definida una operación binaria cerrada (ley de composición interna) y que verifica propiedad asociativa y existencia de elemento neutro, pero no de elemento simétrico, se denomina *semigrupo*.
4) $(\mathbb{Z};\cdot)$ no es grupo. No cumple con el último de los axiomas: Tiene elemento neutro, que es el 1, pero no tiene elemento simétrico. Es un *semigrupo*
5) $(\mathbb{Q};+)$ es un grupo abeliano.
6) $(\mathbb{Q};\cdot)$ no es un grupo, pues el número 0 no tiene simétrico, es decir, no existe ningún número racional que multiplicado por 0 de por resultado 1, que es el neutro de la multiplicación.
7) $(\mathbb{Q}-\{0\};\cdot)$ es un grupo abeliano.
8) $(\mathbb{R};+)$ es un grupo abeliano.
9) $(\mathbb{R};\cdot)$ no es un grupo, pues el número 0 no tiene simétrico, es decir, no existe ningún número real que multiplicado por 0 de por resultado 1, que es el neutro de la multiplicación.
10) $(\mathbb{R}-\{0\};\cdot)$ es un grupo abeliano.
Teniendo en cuenta los ejemplos anteriormente vistos:
11) En $\mathbb{N}$, la operación binaria $*$ definida por $a*b=\max\{a,b\}$, vimos que es asociativa pero no tiene elemento neutro, pues, como veremos luego, si existe neutro, este es único y por lo tanto, tampoco tiene simétrico.
   a) $3*10=10$
   b) $6*10=10$

12) En $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ definida por $a*b=b$, vimos que es asociativa pero no tiene elemento neutro (y por lo tanto tampoco simétrico), pues:
   a) $0*10=10$
   b) $10*0=0$

13) En $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ definida por $a*b=a-b$, como vimos anteriormente no es asociativa, no tiene elemento neutro (y por lo tanto tampoco simétrico), pues:
   a) $0*10=-10$
   b) $10*0=10$

Si un conjunto es un grupo, verifica determinadas propiedades que subyacen de la axiomática de la definición, a pesar de que aparentemente no son consideradas. Estas serán enumeradas acá pero serán demostradas en el Apéndice:

Propiedades: *(Demostraciones en el apéndice)*

Sea $(G;*)$ un grupo, entonces:

1) El elemento neutro es único.

2) El elemento inverso de un elemento $a \in G$ es único.

3) Si $a \in G$ entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

4) $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$ para todo $a \in G$ y $b \in G$.

5) Si $a*c = b*c$ entonces $a = b$

6) Si $c*a = c*b$ entonces $a = b$

7) $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ para todo $a \in G$ y $b \in G$ si y sólo si $(G;*)$ es abeliano.

Definición de Anillo:

Un conjunto A en el que están definidas dos operaciones, una aditiva ($*$) y una multiplicativa ($\bullet$), se denomina *anillo* si se verifica:

i. $(A;*)$ es un grupo abeliano.
ii. A verifica propiedad asociativa respecto a $\bullet$: $a \bullet b \bullet c = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
iii. Se cumplen las propiedades distributivas: $a \bullet (b*c) = a \bullet b * a \bullet c$ y $(b*c) \bullet a = b \bullet a * c \bullet a$

Si en A se verifica propiedad conmutativa respecto a $\bullet$: $a \bullet b = b \bullet a$ para todo $a \in A$ y $b \in A$, se dice que A en un *anillo conmutativo o un anillo abeliano*.

Si en A existe elemento neutro, generalmente simbolizado 1: $a \bullet 1 = 1 \bullet a$ para todo $a \in A$, se dice que A es un *anillo con unidad*.
Notación: $(A;*;\bullet)$

Ejemplos:
1) $(\mathbb{Z};+;\cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
2) $(M_n(\mathbb{R});+;\cdot)$, donde $M_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices de orden n, es un anillo con unidad. El elemento neutro, la unidad, es la matriz identidad de orden n (I_n). No es un anillo conmutativo ya que el producto de matrices no es conmutativo.
3) $(\mathbb{Q};+;\cdot)$, $(\mathbb{R};+;\cdot)$, $(\mathbb{C};+;\cdot)$ son anillos conmutativos con unidad.

4) $\left(\mathbb{R}_n[x];+;\cdot\right)$, donde $\mathbb{R}_n[x]$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n y el polinomio nulo, es un anillo conmutativo con unidad.

Definición de Cuerpo:

Un anillo conmutativo con unidad $(A;*;\bullet)$ se denomina *cuerpo* o *campo* si el conjunto $A-\{e\}$ (donde e es el elemento neutro de la operación $*$), es un grupo respecto a la operación $\bullet$.
Redefiniendo:
Un conjunto A en el que están definidas dos operaciones, una aditiva ($*$) y una multiplicativa ($\bullet$), se denomina *cuerpo* si se verifica:

i. $(A;*)$ es un grupo abeliano.
ii. $(A-\{e\};\bullet)$ es un grupo abeliano.
iii. Se cumple propiedad distributiva: $a\bullet(b*c)=a\bullet b*a\bullet c$ (Como la operación $\bullet$ es conmutativa, no es necesario aclarar ambas posibilidades de propiedad distributiva).

Ejemplos:

$(\mathbb{Q};+;\cdot)$, $(\mathbb{R};+;\cdot)$, $(\mathbb{C};+;\cdot)$ son cuerpos pues:

i. $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{R};+)$, $(\mathbb{C};+)$ son grupos abelianos.
ii. $(\mathbb{Q}-\{0\};\cdot)$, $(\mathbb{R}-\{0\};\cdot)$, $(\mathbb{C}-\{0\};\cdot)$ son grupos abelianos.
iii. Se cumple propiedad distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Propiedades: *(Demostraciones en el apéndice)*

Sea $(A;*;\bullet)$ un cuerpo, entonces:

1) Si $a\neq e$ (elemento neutro de la operación $*$), la ecuación $a\cdot x=b$ tiene única solución.

2) $e\cdot a=e$ (elemento neutro de la operación $*$), cualquiera sea $a\in A$.

3) Si $a\cdot b=e$ (elemento neutro de la operación $*$), entonces $a=e$ o bien $b=e$

Hay muchas más cosas que decir sobre estas estructuras algebraicas, que no están explícitas en este apunte puesto que no son necesarias para los alcances de un curso de Álgebra para las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas.

ESPACIOS VECTORIALES

Definición de Espacio Vectorial:

Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío, en el que están definidas dos operaciones:

$\oplus : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que verifica: $\forall \quad v_1 \in \mathbb{V}$, $\forall \quad v_2 \in \mathbb{V}$, el elemento $v_1 \oplus v_2 \in \mathbb{V}$.

$\odot : \mathbb{K}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que verifica: $\forall \quad \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \quad v \in \mathbb{V}$, el elemento $\lambda \odot v \in \mathbb{V}$.

Con las cuales se cumplen los siguientes axiomas:

1) *Propiedad asociativa*:
$v_1 \oplus v_2 \oplus v_3 = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3), \quad \forall \quad v_1 \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad v_2 \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad v_3 \in \mathbb{V}$

2) *Propiedad conmutativa*:
$v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1, \quad \forall \quad v_1 \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad v_2 \in \mathbb{V}$

3) *Existencia de elemento neutro*:
Existe un elemento en $\mathbb{V}$, al que denominaremos *vector nulo* y se nota, en forma genérica, $0_{\mathbb{V}}$, que verifica $0_{\mathbb{V}} \oplus v = v \oplus 0_{\mathbb{V}} = v, \quad \forall \quad v \in \mathbb{V}$

4) *Existencia de elemento simétrico*:
Para cada $v \in \mathbb{V}$, existe un elemento en $\mathbb{V}$ al que llamaremos *vector simétrico* de v y se nota v', que verifica $v \oplus v' = v' \oplus v = 0_{\mathbb{V}}$

5) *Propiedad asociativa mixta*:
$(\lambda.\beta) \odot v = \lambda \odot (\beta \odot v), \quad \forall \quad v \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \quad \beta \in \mathbb{K}$

6) *Propiedad conmutativa mixta*:
$\lambda \odot v = v \odot \lambda, \quad \forall \quad v \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K}$

7) *Existencia de elemento pseudoneutro*:
Existe un elemento en $\mathbb{K}$, al que denominaremos unidad, el número 1, que verifica $1 \odot v = v \odot 1 = v, \quad \forall \quad v \in \mathbb{V}$

8) *Propiedad distributiva respecto a la operación aditiva en $\mathbb{V}$*:
$\lambda \odot (v_1 \oplus v_2) = \lambda \odot v_1 \oplus \lambda \odot v_2, \quad \forall \quad v_1 \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad v_2 \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K}$

9) *Propiedad distributiva respecto a la operación aditiva en $\mathbb{K}$*:
$(\lambda + \beta) \odot v = \lambda \odot v \oplus \beta \odot v, \quad \forall \quad v \in \mathbb{V}, \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \quad \beta \in \mathbb{K}$

es un *espacio vectorial*.

A los elementos de un espacio vectorial se los denomina *vectores*. Es decir, un *vector* es un elemento de un *espacio vectorial*.

La anterior es la definición formal del *espacio vectorial* $(\mathbb{V};\oplus;\mathbb{K};\odot)$.

- $\mathbb{V}$ es un conjunto no vacío cuyos elementos son vectores.
- $\oplus$ es la operación aditiva definida entre vectores de $\mathbb{V}$; en adelante, y para el resto del trabajo en esta asignatura, $\oplus = +$, la operación adición usual entre vectores, la *ley de composición interna* en $\mathbb{V}$ (L.C.I.).
- $\mathbb{K} = (\mathbb{K};+;\cdot)$ es un cuerpo numérico. En adelante, y para el resto del trabajo en esta asignatura, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- $\odot$ es la operación multiplicativa definida entre escalares (números en el cuerpo numérico $\mathbb{K}$) y vectores. $\odot = \cdot$, el producto por un escalar, la *ley de composición externa* en $\mathbb{V}$ (L.C.E.).

Por lo tanto, de la manera en la cual la trabajaremos nosotros, se tiene la siguiente definición de espacio vectorial:

Definición de Espacio Vectorial Real $(\mathbb{V};+;\mathbb{R};\cdot)=\mathbb{V}$ **:**

Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío, en el que están definidas dos operaciones:

$+:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ que verifica: $\forall \quad v_1\in\mathbb{V}$, $\forall \quad v_2\in\mathbb{V}$, el elemento $v_1+v_2\in\mathbb{V}$.

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ que verifica: $\forall \quad v\in\mathbb{V}$, $\forall \quad \lambda\in\mathbb{R}$, el elemento $\lambda\cdot v\in\mathbb{V}$.

Con las cuales se cumplen los siguientes axiomas:

1) *Propiedad asociativa*:
$v_1+v_2+v_3=(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$, $\forall \quad v_1\in\mathbb{V}$, $\forall \quad v_2\in\mathbb{V}$, $\forall \quad v_3\in\mathbb{V}$

2) *Propiedad conmutativa*:
$v_1+v_2=v_2+v_1$, $\forall \quad v_1\in\mathbb{V}$, $\forall \quad v_2\in\mathbb{V}$

3) *Existencia de elemento neutro*:
Existe un elemento en $\mathbb{V}$, al que denominaremos *vector nulo* y se nota, en forma genérica, $0_{\mathbb{V}}$, que verifica $0_{\mathbb{V}}+v=v+0_{\mathbb{V}}=v$, $\forall \quad v\in\mathbb{V}$

4) *Existencia de elemento inverso aditivo*:
Para cada $v\in\mathbb{V}$, existe un elemento en $\mathbb{V}$ al que llamaremos *vector opuesto* de v y se nota $-v$, que verifica $v+(-v)=(-v)+v=0_{\mathbb{V}}$

5) *Propiedad asociativa mixta*:
$(\lambda.\beta)\cdot v=\lambda\cdot(\beta\cdot v)$, $\forall \quad v\in\mathbb{V}$, $\forall \quad \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall \quad \beta\in\mathbb{R}$

6) *Propiedad conmutativa mixta*:
$\lambda\cdot v=v\cdot\lambda$, $\forall \quad v\in\mathbb{V}$, $\forall \quad \lambda\in\mathbb{R}$

7) *Existencia de elemento pseudoneutro*:
Existe un elemento en $\mathbb{R}$, el número 1, que verifica $1\cdot v=v\cdot 1=v$, $\forall \quad v\in\mathbb{V}$

8) *Propiedad distributiva respecto a la operación aditiva en* $\mathbb{V}$:
$\lambda\cdot(v_1+v_2)=\lambda\cdot v_1+\lambda\cdot v_2$, $\forall \quad v_1\in\mathbb{V}$, $\forall \quad v_2\in\mathbb{V}$, $\forall \quad \lambda\in\mathbb{R}$

9) *Propiedad distributiva respecto a la operación aditiva en* $\mathbb{R}$:
$(\lambda+\beta)\cdot v=\lambda\cdot v+\beta\cdot v$, $\forall \quad v\in\mathbb{V}$, $\forall \quad \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall \quad \beta\in\mathbb{R}$

es un *espacio vectorial* real.

Ejemplos:

1) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:

L.C.I.: $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $v_1=(x_1,x_2)$, $v_2=(y_1,y_2)$ $\Rightarrow$ $v_1+v_2=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

L.C.E.: $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $v=(x_1,x_2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda v=(\lambda.x_1,\lambda x_2)$

Se verifica la axiomática de espacios vectoriales (es posible pensar estos vectores como matrices fila de dos columnas)

2) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:

L.C.I.:
$+:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, v_1=(x_1,x_2,x_3), v_2=(y_1,y_2,y_3)\Rightarrow v_1+v_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$

L.C.E.: $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v=(x_1,x_2,x_3)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda v=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\lambda.x_3)$

Se verifica la axiomática de espacios vectoriales (es posible pensar estos vectores como matrices fila de tres columnas)

3) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:

L.C.I.: $+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $v_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $v_2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ $\Rightarrow$
$v_1+v_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$

L.C.E.: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \cdots, \lambda.x_n)$
Se verifica la axiomática de espacios vectoriales (es posible pensar estos vectores como matrices fila de n columnas)

4) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{m\times n}$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:
L.C.I.: $+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
L.C.E.: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Verifican la axiomática de espacios vectoriales como se vio en la unidad anterior con las propiedades de las operaciones de matrices.

5) $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x] = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, p \text{ es polinomio} \}$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:
L.C.I.: $+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, la suma usual de polinomios.
L.C.E.: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, el producto por un escalar de polinomios.
Se verifica la axiomática de espacios vectoriales.

6) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{[a;b]} = \{ f : [a;b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es una función continua} \}$ es espacio vectorial, en el que están definidas las operaciones:
L.C.I.: $+ : \mathbb{R}^{[a;b]} \times \mathbb{R}^{[a;b]} \to \mathbb{R}^{[a;b]}$, $\quad f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.
L.C.E.: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{[a;b]} \to \mathbb{R}^{[a;b]}$, $\quad \lambda \cdot f(x) = (\lambda \cdot f)(x)$
Se verifica la axiomática de espacios vectoriales.

Nota: Se define la sustracción como: $v - w = v + (-w)$, $\forall \; v \in \mathbb{V}$, $\forall \; w \in \mathbb{V}$

Propiedades: *(Demostraciones en el apéndice)*

1) $0 \cdot v = 0_{\mathbb{V}} \qquad \forall \; v \in \mathbb{V}$

2) $\lambda \cdot 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} \qquad \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\lambda \cdot v = 0_{\mathbb{V}} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee v = 0_{\mathbb{V}}$

4) $(-1) \cdot v = -v \qquad \forall \; v \in \mathbb{V}$

5) $-(v + w) = -v - w \qquad \forall \; v \in \mathbb{V}, \; \forall \; w \in \mathbb{V}$

6) $\lambda \cdot (v - w) = \lambda \cdot v - \lambda \cdot w \qquad \forall \; v \in \mathbb{V}, \; \forall \; w \in \mathbb{V}$

Definición de Subespacio:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $\mathbb{S}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S}$ se denomina *subespacio* de $\mathbb{V}$ si $\mathbb{S}$ es un espacio vectorial en sí mismo.

Si $\mathbb{S}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$, entonces, por ser $\mathbb{S}$ un espacio vectorial, verifica ley de composición interna en $\mathbb{S}$, y ley de composición externa en $\mathbb{S}$ y, por ser $\mathbb{S}$ subconjunto de $\mathbb{V}$, cumple todas las propiedades de la axiomática de espacios vectoriales (todos los elementos de $\mathbb{S}$ son elementos de $\mathbb{V}$).

Por lo tanto, es posible redefinir *subespacio* de manera que sea posible verificar directamente desde la definición, si es o no un *subespacio*:

Un subconjunto $\mathbb{S}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$ si verifica:

a) $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S}$

b) $\forall \quad s_1 \in \mathbb{S} \quad \wedge \quad \forall \quad s_2 \in \mathbb{S}, \quad s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$

c) $\forall \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \forall \quad s \in \mathbb{S}, \quad \lambda \cdot s \in \mathbb{S}$

Ejemplos:

1) $\mathbb{S} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0 \right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}} = (0;0) \Rightarrow 2\cdot 0 - 5\cdot 0 = 0 - 0 = 0$

b) Sea $s_1 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_1 = (x_1; x_2)$ que verifica: $2x_1 - 5x_2 = 0$

Sea $s_2 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_2 = (y_1; y_2)$ que verifica: $2y_1 - 5y_2 = 0$

Queremos ver si $s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$

i) $s_1 + s_2 = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$

ii) $2(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) =$ $\longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $s_1 + s_2$ en ecuación de $\mathbb{S}$

$= 2x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 5y_2$ $\longrightarrow$ Por propiedad distributiva

$= \underbrace{2x_1 - 5x_2}_{\substack{0 \\ \text{Pues } s_1 \in \mathbb{S}}} + \underbrace{2y_1 - 5y_2}_{\substack{0 \\ \text{Pues } s_2 \in \mathbb{S}}} = 0$ $\longrightarrow$ Reordenando los términos

c) Sea $s \in \mathbb{S} \Rightarrow s = (x_1; x_2)$ que verifica: $2x_1 - 5x_2 = 0$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

Queremos ver si $\lambda \cdot s \in \mathbb{S}$

i) $\lambda \cdot s = (\lambda . x_1; \lambda . x_2)$

ii) $2(\lambda . x_1) - 5(\lambda . x_2) =$ $\longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $\lambda \cdot s$ en ecuación de $\mathbb{S}$

$= (2\lambda).x_1 - (5\lambda).x_2$ $\longrightarrow$ Por propiedad asociativa

$= \lambda . (\underbrace{2.x_1 - 5.x_2}_{\substack{0 \\ \text{Pues } s \in \mathbb{S}}}) = \lambda . 0 = 0$ $\longrightarrow$ Sacando factor común λ

Como cumple las tres condiciones, $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

2) $\mathbb{S} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 + 2x_2 = 4 \right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}} = (0;0) \Rightarrow 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0 + 0 = 0 \neq 4$

Como ya no cumple la primera de las tres condiciones, $\mathbb{S}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Nota: Una ecuación no homogénea no representa un subespacio

Nota: Son subespacios de $\mathbb{R}^2$:

- $\mathbb{S} = \left\{ (0;0) \right\}$, llamado subespacio trivial.
- Las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son los subespacios propios.
- $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$, el otro subespacio propio.

3) $\mathbb{S}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1+3x_2-x_3=0\right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}}=(0;0;0) \Rightarrow 0+3.0-0=0$

b) Sea $s_1\in\mathbb{S} \Rightarrow s_1=(x_1;x_2;x_3)$ que verifica: $x_1+3x_2-x_3=0$

Sea $s_2\in\mathbb{S} \Rightarrow s_2=(y_1;y_2;y_3)$ que verifica: $y_1+3y_2-y_3=0$

Queremos ver si $s_1+s_2\in\mathbb{S}$

i) $s_1+s_2=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3)$

ii) $(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=$ ⟶ Reemplazando las coordenadas de s_1+s_2 en la ecuación de $\mathbb{S}$

$=x_1+y_1+3x_2+3y_2-x_3-y_3=$ ⟶ Por propiedad distributiva

$=\underbrace{x_1+3x_2-x_3}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_1\in\mathbb{S}}}+\underbrace{y_1+3y_2-y_3}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_2\in\mathbb{S}}}$ ⟶ Reordenando los términos

$0 \;+\; 0 \;=\; 0$

c) Sea $s\in\mathbb{S} \Rightarrow s=(x_1;x_2;x_3)$ que verifica: $x_1+3x_2-x_3=0$

Sea $\lambda\in\mathbb{R}$

Queremos ver si $\lambda\cdot s\in\mathbb{S}$

i) $\lambda\cdot s=(\lambda.x_1;\lambda.x_2;\lambda x_3)$

ii) $(\lambda.x_1)+3(\lambda.x_2)-(\lambda x_3)$ ⟶ Reemplazando las coordenadas de $\lambda\cdot s$ en la ecuación de $\mathbb{S}$

$=\lambda.x_1+(3.\lambda).x_2-\lambda x_3$ ⟶ Por propiedad asociativa

$=\lambda.\underbrace{(x_1+3x_2-x_3)}_{\substack{0\\ \text{Pues } s\in\mathbb{S}}}$ ⟶ Sacando factor común λ

$=\lambda.0=0$

Como cumple las tres condiciones, $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

<u>Nota</u>: Son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{S}=\{(0;0;0)\}$, llamado subespacio trivial.
- Las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son los subespacios propios.
- Los planos que pasan por el origen de coordenadas, también son los subespacios propios.
- $\mathbb{S}=\mathbb{R}^3$, el otro subespacio propio.

4) $\mathbb{S}=\left\{v\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_1^{\,2}-x_2^{\,2}=0\right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}}=(0;0) \Rightarrow 0^2-0^2=0-0=0$

b) Sea $s_1\in\mathbb{S} \Rightarrow s_1=(x_1;x_2)$ que verifica: $x_1^{\,2}-x_2^{\,2}=0$

Sea $s_2\in\mathbb{S} \Rightarrow s_2=(y_1;y_2)$ que verifica: $y_1^{\,2}-y_2^{\,2}=0$

Queremos ver si $s_1+s_2\in\mathbb{S}$

i) $s_1+s_2=(x_1+y_1;x_2+y_2)$

ii) $(x_1+y_1)^2-(x_2+y_2)^2=$ ⟶ Reemplazando las coordenadas de s_1+s_2 en ecuación de $\mathbb{S}$

⟶ Desarrollando los cuadrados de binomios

⟶ Desarrollando los cálculos

$$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - \left(x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2\right)$$

$$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - x_2^2 - 2x_2y_2 - y_2^2$$

$$= \underbrace{x_1^2 - x_2^2}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_1 \in \mathbb{S}}} + \underbrace{y_1^2 - y_2^2}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_2 \in \mathbb{S}}} + 2x_1y_1 - 2x_2y_2 \longrightarrow \text{Reordenando los términos}$$

$$0 + 0 = 2x_1y_1 - 2x_2y_2$$

Que la expresión $2x_1y_1 - 2x_2y_2$ se anule o no, depende de los valores de las coordenadas de los vectores, no se cumple para todo $s_1 \in \mathbb{S}$ y $s_2 \in \mathbb{S}$

Como ya no cumple la segunda de las tres condiciones, $\mathbb{S}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

5) $\mathbb{S} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 0\right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}} = (0;0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$

b) Sea $s_1 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_1 = (x_1; x_2)$ que verifica: $x_1^2 + x_2^2 = 0$

Sea $s_2 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_2 = (y_1; y_2)$ que verifica: $y_1^2 + y_2^2 = 0$

Queremos ver si $s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$

i) $s_1 + s_2 = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$

ii) $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $s_1 + s_2$ en ecuación de $\mathbb{S}$

$$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + \left(x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2\right) \longrightarrow \text{Desarrollando los cuadrados de binomios}$$

$$= \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_1 \in \mathbb{S}}} + \underbrace{y_1^2 + y_2^2}_{\substack{0\\ \text{Pues } s_2 \in \mathbb{S}}} + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 \longrightarrow \text{Reordenando los términos}$$

$$0 + 0 = 2x_1y_1 + 2x_2y_2$$

Que una expresión del tipo $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ se anule o no, depende de los valores de las coordenadas de los vectores, pero este es un caso muy particular, ya que, de la única forma en la cual $x_1^2 + x_2^2 = 0$ es sólo si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y por lo tanto, $\mathbb{S} = \left\{(0;0)\right\}$, que es uno de los subespacios triviales de $\mathbb{R}^2$.

En algunos casos, es necesario analizar previamente qué tipo de conjunto es para decidir si es o no subespacio

6) $\mathbb{S} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 \geq 0\right\}$

Debemos analizar si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}} = (0;0) \Rightarrow 2 \cdot 0 = 0 \geq 0$

b) Sea $s_1 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_1 = (x_1; x_2)$ que verifica: $2x_1 \geq 0$

Sea $s_2 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_2 = (y_1; y_2)$ que verifica: $2y_1 \geq 0$

Queremos ver si $s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$

i) $s_1 + s_2 = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$

ii) $2(x_1 + y_1) \longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $s_1 + s_2$ en la condición de $\mathbb{S}$

Por propiedad distributiva

$$\underbrace{2x_1}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Pues} \\ s_1 \in \mathbb{S}}} + \underbrace{2y_1}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Pues} \\ s_2 \in \mathbb{S}}} \geq 0 \longrightarrow$$

c) Sea $s \in \mathbb{S} \Rightarrow s = (x_1; x_2)$ que verifica: $2x_1 \geq 0$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

Queremos ver si $\lambda \cdot s \in \mathbb{S}$

i) $\lambda \cdot s = (\lambda.x_1; \lambda.x_2)$

ii) $2(\lambda.x_1)$ $\longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $\lambda \cdot s$ en la condición de $\mathbb{S}$

$= (2\lambda).x_1$ $\longrightarrow$ Por propiedad asociativa

$= (\lambda.2).x_1$ $\longrightarrow$ Por propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$

$= \lambda.\underbrace{(2.x_1)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Pues } s \in \mathbb{S}}}$ $\longrightarrow$ Por propiedad asociativa

Pero $\lambda.(2.x_1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$.

Si $\lambda \leq 0$, $\lambda.(2.x_1) \leq 0$ y no verificaría la condición de $\mathbb{S}$, entonces en este caso, $\mathbb{S}$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

7) $\mathbb{S} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,/\, A.v = 0_{\mathbb{R}^m} \quad \text{con} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \right\}$

Analizaremos si se verifican las tres condiciones:

a) $0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow A.0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^m}$

b) Sea $s_1 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_1 \in \mathbb{R}^n$ que verifica: $A.s_1 = 0_{\mathbb{R}^m}$

Sea $s_2 \in \mathbb{S} \Rightarrow s_2 \in \mathbb{R}^n$ que verifica: $A.s_2 = 0_{\mathbb{R}^m}$

Queremos ver si $s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$

i) $s_1 + s_2 \in \mathbb{R}^n$

ii) $A.(s_1 + s_2) =$ $\longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $s_1 + s_2$ en ecuación de $\mathbb{S}$

$= \underbrace{A.s_1}_{\substack{0_{\mathbb{R}^m} \\ \text{Pues} \\ s_1 \in \mathbb{S}}} + \underbrace{A.s_2}_{\substack{0_{\mathbb{R}^m} \\ \text{Pues} \\ s_2 \in \mathbb{S}}} = 0_{\mathbb{R}^m}$ $\longrightarrow$ Por propiedad distributiva

c) Sea $s \in \mathbb{S} \Rightarrow s \in \mathbb{R}^n$ que verifica: $A.s = 0_{\mathbb{R}^m}$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

Queremos ver si $\lambda \cdot s \in \mathbb{S}$

i) $\lambda \cdot s \in \mathbb{R}^n$

ii) $A.(\lambda.s) =$ $\longrightarrow$ Reemplazando las coordenadas de $\lambda \cdot s$ en ecuación de $\mathbb{S}$

$= (A.\lambda).s$ $\longrightarrow$ Por propiedad asociativa

$= (\lambda.A).s$ $\longrightarrow$ Por propiedad conmutativa en el producto por un escalar de matrices

$= \lambda.\underbrace{(A.s)}_{\substack{0_{\mathbb{R}^m} \\ \text{Pues } s \in \mathbb{S}}} = \lambda.0_{\mathbb{R}^m} = 0_{\mathbb{R}^m}$ $\longrightarrow$ Por propiedad asociativa

Como cumple las tres condiciones, $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Nota: Los sistemas de ecuaciones homogéneos son subespacios de $\mathbb{R}^n$

8) $\mathbb{S}=\{v\in\mathbb{V}\,/\,v=k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2,\ \text{con } v_1\wedge v_2\in\mathbb{V}\ \text{fijos},\ k_1\wedge k_2\in\mathbb{R}\}$

Analizaremos si se verifican las tres condiciones:

a) Queremos ver si $0_{\mathbb{V}}\in\mathbb{S}$

$0_{\mathbb{V}}=0\cdot v_1+0\cdot v_2$, tomando $k_1=0\wedge k_2=0$

b) Sea $s_1\in\mathbb{S}\ \Rightarrow\ s_1=k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2$

Sea $s_2\in\mathbb{S}\ \Rightarrow\ s_2=k_1'\cdot v_1+k_2'\cdot v_2$

Queremos ver si $s_1+s_2\in\mathbb{S}$

$s_1+s_2=(k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2)+(k_1'\cdot v_1+k_2'\cdot v_2)$

$=k_1\cdot v_1+(k_2\cdot v_2+k_1'\cdot v_1)+k_2'\cdot v_2$ ⟶ Propiedad asociativa

$=k_1\cdot v_1+(k_1'\cdot v_1+k_2\cdot v_2)+k_2'\cdot v_2$ ⟶ Propiedad conmutativa

$=(k_1\cdot v_1+k_1'\cdot v_1)+(k_2\cdot v_2+k_2'\cdot v_2)$ ⟶ Propiedad asociativa

$=(k_1+k_1')\cdot v_1+(k_2+k_2')\cdot v_2$ ⟶ Propiedad distributiva de suma en $\mathbb{R}$

$=k_1''\cdot v_1+k_2''\cdot v_2\ \Rightarrow\ s_1+s_2\in\mathbb{S}$

c) Sea $s\in\mathbb{S}\ \Rightarrow\ s=k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2$

Sea $\lambda\in\mathbb{R}$

Queremos ver si $\lambda\cdot s\in\mathbb{S}$

$\lambda\cdot s=\lambda\cdot(k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2)$

$=\lambda\cdot(k_1\cdot v_1)+\lambda\cdot(k_2\cdot v_2)$ ⟶ Propiedad distributiva

$=(\lambda.k_1)\cdot v_1+(\lambda.k_2)\cdot v_2$ ⟶ Propiedad asociativa mixta

$=\tilde{k}_1\cdot v_1+\tilde{k}_2\cdot v_2\ \Rightarrow\ \lambda\cdot s\in\mathbb{S}$

Como cumple las tres condiciones, $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Propiedades: *(Demostraciones en el apéndice)*

1) Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ es subespacio de $\mathbb{V}$

2) Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ $\Rightarrow$ "$\mathbb{S}\cup\mathbb{T}$ es subespacio de $\mathbb{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{S}\subset\mathbb{T}\ \vee\ \mathbb{T}\subset\mathbb{S}$"

Combinación Lineal:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, sea $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. El vector $v\in\mathbb{V}$ se dice que es combinación lineal de $v_1,v_2,\cdots,v_k$ si existen escalares $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ que permitan expresarlo de la forma $v=\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2+\cdots+\lambda_k\cdot v_k$.

Observaciones: *(Demostraciones en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, sea $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$, entonces:

1) $0_{\mathbb{V}}$ es combinación lineal de $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$.

2) Si v y w son combinación lineal de $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, entonces $v+w$ también lo es.

3) Si v es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot v$ también lo es.

Por lo tanto, el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ forman un subespacio. Este subespacio se dice que está generado por los vectores del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, es el subespacio:

$$\mathbb{S} = \{v \in \mathbb{V} \,/\, v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k, \text{ con } v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathbb{V} \text{ fijos, } \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Y se nota en una forma un poco más amigable como:

$$\mathbb{S} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \quad \text{o también}$$

$$\mathbb{S} = \langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle$$

Los subespacios pueden estar expresados de dos maneras:

- Por las condiciones que cumplen las coordenadas de sus elementos: sistemas de ecuaciones.
- Por la forma en que se expresa como combinación lineal: por generadores.

Cualquiera de las dos maneras en que se exprese a un subespacio sirve para reconocerlo. A veces se necesita por generadores, otras veces por ecuaciones, depende de qué tipo de ejercicio se quiere resolver.

En particular, si para todo $v \in \mathbb{V}$, v es combinación lineal de los elementos del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, decimos que $v_1, v_2, \cdots, v_k$ generan $\mathbb{V}$, o bien que $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$: $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$

Ejemplos:

Analizar en cada caso si el vector dado $v \in \mathbb{V}$ es combinación lineal de los otros vectores:

1) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (6;5)$ y $v_2 = (7;6)$ y sea $v = (-2;4)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, si existen λ_1 y λ_2 que verifiquen:

$$(-2;4) = \lambda_1 \cdot (6;5) + \lambda_2 \cdot (7;6)$$

$$(-2;4) = (6\lambda_1; 5\lambda_1) + (7\lambda_2; 6\lambda_2)$$

$$(-2;4) = (6\lambda_1 + 7\lambda_2; 5\lambda_1 + 6\lambda_2)$$

$$\begin{cases} 6\lambda_1 + 7\lambda_2 = -2 \\ 5\lambda_1 + 6\lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -2 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{34}{6} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & -240 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{34}{6} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6\lambda_1 = -240 \\ \frac{1}{6}\lambda_2 = \frac{34}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -40 \\ \lambda_2 = 34 \end{cases}$$

, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal.

$$(-2;4) = -40 \cdot (6;5) + 34 \cdot (7;6)$$

En este caso, si consideramos al subespacio que v_1 y v_2 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues es uno de los infinitos vectores que se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S} = gen\{(6;5);(7;6)\} \quad \text{y} \quad v \in \mathbb{S}$$

2) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;2)$, $v_2 = (2;-1)$ y $v_3 = (-2;4)$ y sea $v = (5;-3)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, si existen λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

$$(5;-3)=\lambda_1\cdot(1;2)+\lambda_2\cdot(2;-1)+\lambda_3\cdot(-2;4)$$
$$(5;-3)=(\lambda_1;2\lambda_1)+(2\lambda_2;-\lambda_2)+(-2\lambda_3;4\lambda_3)$$
$$(5;-3)=(\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3;2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=5\\ 2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=-3\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&5\\2&-1&4&-3\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&5\\0&-5&8&-13\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{4}&0&\frac{7}{4}\\0&-5&8&-13\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2=\frac{7}{4}\\ -5\lambda_2+8\lambda_3=-13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\lambda_2\\ \lambda_3=-\frac{13}{8}+\frac{5}{8}\lambda_2\end{cases}$$

, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal, en este caso, son infinitos.

$$(5;-3)=\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\lambda_2\right)\cdot(1;2)+\lambda_2\cdot(2;-1)+\left(-\frac{13}{8}+\frac{5}{8}\lambda_2\right)\cdot(-2;4)$$

Si consideramos al subespacio que v_1, v_2 y v_3 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues es uno de los infinitos vectores que se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(1;2);(2;-1);(-2;4)\} \quad \text{y} \quad v\in\mathbb{S}$$

3) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;-2)$ y $v_2=(-2;4)$ y sea $v=(5;-10)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, si existen λ_1 y λ_2 que verifiquen:

$$(5;-10)=\lambda_1\cdot(1;-2)+\lambda_2\cdot(-2;4)$$
$$(5;-10)=(\lambda_1;-2\lambda_1)+(-2\lambda_2;4\lambda_2)$$
$$(5;-10)=(\lambda_1-2\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=5\\ -2\lambda_1+4\lambda_2=-10\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&5\\-2&4&-10\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&5\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \{\lambda_1-2\lambda_2=5 \Rightarrow$$

$\{\lambda_1=5+2\lambda_2$, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal, en este caso, también son infinitos.

$$(5;-10)=(5+2\lambda_2)\cdot(1;-2)+\lambda_2\cdot(-2;4)$$

Si consideramos al subespacio que v_1 y v_2 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues es uno de los infinitos vectores que se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(1;-2);(-2;4)\} \quad \text{y} \quad v\in\mathbb{S}$$

4) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(3;-2)$ y $v_2=(-6;4)$ y sea $v=(6;-2)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, si existen λ_1 y λ_2 que verifiquen:

$$(6;-2)=\lambda_1\cdot(3;-2)+\lambda_2\cdot(-6;4)$$

$(6;-2)=(3\lambda_1;-2\lambda_1)+(-6\lambda_2;4\lambda_2)$

$(6;-2)=(3\lambda_1-6\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$

$\begin{cases} 3\lambda_1-6\lambda_2=6 \\ -2\lambda_1+4\lambda_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ El sistema es incompatible, entonces no existen escalares que permitan escribir la combinación lineal. En este caso, v no es combinación lineal de v_1 y v_2.

Si consideramos al subespacio que v_1 y v_2 generan, el vector v *no* pertenece a dicho subespacio, por no ser combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(3;-2);(-6;4)\} \quad \text{y} \quad v\notin\mathbb{S}$$

5) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$ y sea $v=(3;4;-1)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, si existen λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

$(3;4;-1)=\lambda_1\cdot(1;2;1)+\lambda_2\cdot(1;2;0)+\lambda_3\cdot(2;0;0)$

$(3;4;-1)=(\lambda_1;2\lambda_1;\lambda_1)+(\lambda_2;2\lambda_2;0)+(2\lambda_3;0;0)$

$(3;4;-1)=(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2;\lambda_1)$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=3 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2 \quad\; =4 \\ \lambda_1 \quad\quad\quad\quad =-1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_3=1 \\ 2\lambda_2=6 \\ \lambda_1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3=\frac{1}{2} \\ \lambda_2=3 \\ \lambda_1=-1 \end{cases}$, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal.

$$(3;4;-1)=-1\cdot(1;2;1)+3\cdot(1;2;0)+\frac{1}{2}\cdot(2;0;0)$$

Si consideramos al subespacio que v_1, v_2 y v_3 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(1;2;1);(1;2;0);(2;0;0)\} \quad \text{y} \quad v\in\mathbb{S}$$

6) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$ y sea $v=(6;10;1)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, si existen λ_1 y λ_2 que verifiquen:

$(6;10;1)=\lambda_1\cdot(-1;2;-1)+\lambda_2\cdot(2;1;1)$

$(6;10;1)=(-\lambda_1;2\lambda_1;-\lambda_1)+(2\lambda_2;\lambda_2;\lambda_2)$

$(6;10;1)=(-\lambda_1+2\lambda_2;2\lambda_1+\lambda_2;-\lambda_1+\lambda_2)$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 6 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

, el sistema es incompatible, entonces no existen escalares que permitan escribir esta combinación lineal.

Si consideramos al subespacio que v_1 y v_2 generan, el vector v *no* pertenece a dicho subespacio, pues no se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S} = gen\{(-1;2;-1);(2;1;1)\} \quad \text{y} \quad v \notin \mathbb{S}$$

7) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;3;-1)$, $v_2 = (-1;2;2)$ y $v_3 = (2;1;-3)$ y sea $v = (5;5;-7)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, si existen λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

$$(5;5;-7) = \lambda_1 \cdot (1;3;-1) + \lambda_2 \cdot (-1;2;2) + \lambda_3 \cdot (2;1;-3)$$

$$(5;5;-7) = (\lambda_1;3\lambda_1;-\lambda_1) + (-\lambda_2;2\lambda_2;2\lambda_2) + (2\lambda_3;\lambda_3;-3\lambda_3)$$

$$(5;5;-7) = (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3;3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3;-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \\ 3 & 2 & 1 & \\ -1 & 2 & -3 & - \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & - \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2 + \lambda_3 \end{cases}$$

, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal.

$$(5;5;-7) = (3 - \lambda_3) \cdot (1;3;-1) + (-2 + \lambda_3) \cdot (-1;2;2) + \lambda_3 \cdot (2;1;-3)$$

Si consideramos al subespacio que v_1, v_2 y v_3 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S} = gen\{(1;3;-1);(-1;2;2);(2;1;-3)\} \quad \text{y} \quad v \in \mathbb{S}$$

8) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;3;-1)$, $v_2 = (-1;2;2)$ y $v_3 = (2;1;-3)$ y sea $v' = (3;-2;5)$

Veamos si v' se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, si existen λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

$$(3;-2;5) = \lambda_1 \cdot (1;3;-1) + \lambda_2 \cdot (-1;2;2) + \lambda_3 \cdot (2;1;-3)$$

$$(3;-2;5) = (\lambda_1;3\lambda_1;-\lambda_1) + (-\lambda_2;2\lambda_2;2\lambda_2) + (2\lambda_3;\lambda_3;-3\lambda_3)$$

$$(3;-2;5) = (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3;3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3;-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3)$$

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=3 \\ 3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=-2 \\ -\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\ 1 & 2 & \\ 3 & 2 & 1\ - & \\ -1 & 2\ - & 3 & \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\ 1 & 2 & \\ 0 & 5\ - & 5- & \\ 0 & 1\ - & 1 & \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -51 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right)$, el sistema es incompatible, entonces no existen escalares que permitan escribir al vector v' como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Si consideramos al subespacio que v_1, v_2 y v_3 generan, el vector v' *no* pertenece a dicho subespacio, pues no se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2);(2;1;-3)\} \quad \text{y} \quad v'\notin\mathbb{S}$$

9) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-2;4;2)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(1;-2;-1)$ y sea $v=(1;-2;1)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, si existen λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

$$(1;-2;1)=\lambda_1\cdot(-2;4;2)+\lambda_2\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(1;-2;-1)$$

$$(1;-2;1)=(-2\lambda_1;4\lambda_1;2\lambda_1)+(-\lambda_2;2\lambda_2;2\lambda_2)+(\lambda_3;-2\lambda_3;-\lambda_3)$$

$$(1;-2;1)=(-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3;4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)$$

$$\begin{cases} -2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=1 \\ 4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=-2 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -\ 1 & & 1 \\ 4 & 2\ - & & 2- \\ 2 & 2\ - & & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -\ 1 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda_1+\lambda_3=3 \\ \lambda_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3=3+2\lambda_1 \\ \lambda_2=2 \end{cases}$, entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal.

$$(1;-2;1)=\lambda_1\cdot(-2;4;2)+2\cdot(-1;2;2)+(3+2\lambda_1)\cdot(1;-2;-1)$$

Si consideramos al subespacio que v_1, v_2 y v_3 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S}=gen\{(-2;4;2);(-1;2;2);(1;-2;-1)\} \quad \text{y} \quad v\in\mathbb{S}$$

10) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;-2;-1)$ y $v_2=(-2;4;2)$ y sea $v=(-3;6;3)$

Veamos si v se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, si existen λ_1 y λ_2 que verifiquen:

$$(-3;6;3)=\lambda_1\cdot(1;-2;-1)+\lambda_2\cdot(-2;4;2)$$

$$(-3;6;3)=(\lambda_1;-2\lambda_1;-\lambda_1)+(-2\lambda_2;4\lambda_2;2\lambda_2)$$

$$(-3;6;3)=(\lambda_1-2\lambda_2;-2\lambda_1++4\lambda_2;-\lambda_1+2\lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1-2\lambda_2=-3 \\ -2\lambda_1+4\lambda_2=6 \\ -\lambda_1+2\lambda_2=3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{\lambda_1-2\lambda_2=-3 \Rightarrow$$

$\{\lambda_1 = -3 + 2\lambda_2$ entonces existen los escalares que permiten escribir la combinación lineal:

$$(-3;6;3) = (-3+2\lambda_2)\cdot(1;-2;-1) + \lambda_2\cdot(-2;4;2)$$

Si consideramos al subespacio que v_1 y v_2 generan, el vector v pertenece a dicho subespacio, pues se puede escribir como combinación lineal de ellos.

$$\mathbb{S} = gen\{(1;-2;-1);(-2;4;2)\} \quad \text{y} \quad v \in \mathbb{S}$$

***Propiedad*:** *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, y sean $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vectores de $\mathbb{S}$, entonces $gen\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{S}$. Se verifica que $gen\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es el menor subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k$.

Independencia lineal:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Los vectores del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ se dicen *linealmente independientes* si, al escribir al vector nulo, $0_{\mathbb{V}}$, como combinación lineal de ellos, los escalares son únicamente nulos.

$v_1, v_2, \cdots, v_k$ se dicen *linealmente independientes* sí y sólo si, "si $0_{\mathbb{V}} = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_k = 0$"

Dependencia lineal:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Los vectores del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ se dicen *linealmente dependientes* si, al escribir al vector nulo, $0_{\mathbb{V}}$, como combinación lineal de ellos, no todos los escalares son nulos.

$v_1, v_2, \cdots, v_k$ se dicen *linealmente dependientes* sí y sólo si, "si $0_{\mathbb{V}} = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k \Rightarrow \exists \;\; \lambda_i \neq 0 \;\; \text{para algún } 1 \leq \text{i} \leq \text{k}$"
En este caso, alguno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.

Ejemplos:
Con los vectores asociados a los ejemplos de combinación lineal, decidir en cada caso si los vectores son linealmente dependientes o independientes. En el caso de ser linealmente dependientes, escribir a los vectores dependientes como combinación lineal de los demás:

1) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (6;5)$ y $v_2 = (7;6)$

   Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

   $(0;0) = \lambda_1 \cdot (6;5) + \lambda_2 \cdot (7;6)$

   $(0;0) = (6\lambda_1; 5\lambda_1) + (7\lambda_2; 6\lambda_2)$

$(0;0)=(6\lambda_1+7\lambda_2;5\lambda_1+6\lambda_2)$

$\begin{cases}6\lambda_1+7\lambda_2=0\\5\lambda_1+6\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}6&7&0\\5&6&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}6&7&0\\0&\frac{1}{6}&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}6&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}6\lambda_1=0\\\frac{1}{6}\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\end{cases}$, entonces $v_1=(6;5)$ y $v_2=(7;6)$ son linealmente independientes.

$\mathbb{S}=gen\{(6;5);(7;6)\}$ y los vectores son L.I.

2) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;2)$, $v_2=(2;-1)$ y $v_3=(-2;4)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(0;0)=\lambda_1\cdot(1;2)+\lambda_2\cdot(2;-1)+\lambda_3\cdot(-2;4)$

$(0;0)=(\lambda_1;2\lambda_1)+(2\lambda_2;-\lambda_2)+(-2\lambda_3;4\lambda_3)$

$(0;0)=(\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3;2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3)$

$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\2&-1&4&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&-5&8&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{4}&0&0\\0&-5&8&0\end{array}\right) \Rightarrow$

$\begin{cases}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2=0\\-5\lambda_2+8\lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=-\frac{3}{4}\lambda_2\\\lambda_3=\frac{5}{8}\lambda_2\end{cases}$ Los vectores son linealmente dependientes, entonces

la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es:

$$(0;0)=\left(-\frac{3}{4}\lambda_2\right)\cdot(1;2)+\lambda_2\cdot(2;-1)+\frac{5}{8}\lambda_2\cdot(-2;4)$$

Vamos a despejar un vector, es decir, vamos a escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros. En este caso, se puede despejar cualquiera, pero en general, para garantizar que no haya errores ni confusión en la elección, vamos a despejar el vector asociado a la incógnita independiente de la resolución del sistema de ecuaciones.

$\frac{3}{4}\lambda_2\cdot(1;2)-\frac{5}{8}\lambda_2\cdot(-2;4)=\lambda_2\cdot(2;-1)$ dividiendo por $\lambda_2\neq 0$ ambos miembros

$\frac{3}{4}\cdot(1;2)-\frac{5}{8}\cdot(-2;4)=\cdot(2;-1)$

En este caso, el vector $v_2=(2;-1)$ es combinación lineal de los vectores $v_1=(1;2)$ y $v_3=(-2;4)$.

$\mathbb{S}=gen\{(1;2);(2;-1);(-2;4)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que

$\mathbb{S}=gen\{(1;2);(-2;4)\}$ pues $(2;-1)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$.

3) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;-2)$ y $v_2=(-2;4)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(0;0)=\lambda_1\cdot(1;-2)+\lambda_2\cdot(-2;4)$

$(0;0)=(\lambda_1;-2\lambda_1)+(-2\lambda_2;4\lambda_2)$

$(0;0)=(\lambda_1-2\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$

$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=0\\-2\lambda_1+4\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\-2&4&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \{\lambda_1-2\lambda_2=0 \Rightarrow \{\lambda_1=2\lambda_2$

Los vectores son linealmente dependientes, entonces la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es:

$$(0;0)=2\lambda_2\cdot(1;-2)+\lambda_2\cdot(-2;4)$$

Despejando v_2 ya que λ_2 es la incógnita independiente del sistema:

$-2\lambda_2\cdot(1;-2)=\lambda_2\cdot(-2;4)$ y dividiendo por $\lambda_2\neq 0$ ambos miembros

$-2\cdot(1;-2)=(-2;4)$

En este caso, el vector $v_2=(-2;4)$ es combinación lineal sólo del vector $v_1=(1;-2)$, es decir v_2 es múltiplo de v_1.

$\mathbb{S}=gen\{(1;-2);(-2;4)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que $\mathbb{S}=gen\{(1;-2)\}$ pues $(-2;4)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal del generador de $\mathbb{S}$.

4) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(3;-2)$ y $v_2=(-6;4)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(0;0)=\lambda_1\cdot(3;-2)+\lambda_2\cdot(-6;4)$

$(0;0)=(3\lambda_1;-2\lambda_1)+(-6\lambda_2;4\lambda_2)$

$(0;0)=(3\lambda_1-6\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$

$\begin{cases}3\lambda_1-6\lambda_2=0\\-2\lambda_1+4\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3&-6&0\\-2&4&0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3&-6&0\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \{3\lambda_1-6\lambda_2=0 \Rightarrow$

$\{\lambda_1=2\lambda_2$ Los vectores son linealmente dependientes, entonces la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es:

$$(0;0)=2\lambda_2\cdot(3;-2)+\lambda_2\cdot(-6;4)$$

Despejando v_2 ya que λ_2 es la incógnita independiente del sistema:

$-2\lambda_2\cdot(3;-2)=\lambda_2\cdot(-6;4)$ y dividiendo por $\lambda_2\neq 0$ ambos miembros

$-2\cdot(3;-2)=(-6;4)$

En este caso, el vector $v_2=(-6;4)$ es combinación lineal sólo del vector $v_1=(3;-2)$, es decir v_2 es múltiplo de v_1.

$\mathbb{S}=gen\{(3;-2);(-6;4)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que $\mathbb{S}=gen\{(3;-2)\}$ pues $(-6;4)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal del generador de $\mathbb{S}$.

5) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(1;2;1)+\lambda_2\cdot(1;2;0)+\lambda_3\cdot(2;0;0)$

$(0;0;0)=(\lambda_1;2\lambda_1;\lambda_1)+(\lambda_2;2\lambda_2;0)+(2\lambda_3;0;0)$

$(0;0;0)=(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2;\lambda_1)$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+2\lambda_2\quad\;\;=0\\ \lambda_1\qquad\qquad\;\;=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\0&2&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&2&0\\0&2&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$\begin{cases}2\lambda_3=0\\2\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_3=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases}$, entonces $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$ son linealmente independientes.

$\mathbb{S}=gen\{(1;2;1);(1;2;0);(2;0;0)\}$ y los vectores son L.I.

6) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(-1;2;-1)+\lambda_2\cdot(2;1;1)$

$(0;0;0)=(-\lambda_1;2\lambda_1;-\lambda_1)+(2\lambda_2;\lambda_2;\lambda_2)$

$(0;0;0)=(-\lambda_1+2\lambda_2;2\lambda_1+\lambda_2;-\lambda_1+\lambda_2)$

$$\begin{cases}-\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\2&1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\3&0&0\\-1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$$

entonces $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$ son linealmente independientes.

$\mathbb{S}=gen\{(-1;2;-1);(2;1;1)\}$ y los vectores son L.I.

7) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;3;-1)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(2;1;-3)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(1;3;-1)+\lambda_2\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(2;1;-3)$

$(0;0;0)=(\lambda_1;3\lambda_1;-\lambda_1)+(-\lambda_2;2\lambda_2;2\lambda_2)+(2\lambda_3;\lambda_3;-3\lambda_3)$

$(0;0;0)=(\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3;3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3;-\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3)$

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-&1&2\\3&&2&1\\-1&&2\;-&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-&1&2\\0&&5\;-&5\\0&&1\;-&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-\lambda_3\\ \lambda_2=\lambda_3\end{cases}$ Los vectores son linealmente dependientes, entonces la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es

$$(0;0;0)=-\lambda_3\cdot(1;3;-1)+\lambda_3\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(2;1;-3)$$

Despejando v_3 ya que λ_3 es la incógnita independiente del sistema:

$\lambda_3\cdot(1;3;-1)-\lambda_3\cdot(-1;2;2)=\lambda_3\cdot(2;1;-3)$ y dividiendo por $\lambda_3\neq 0$

$(1;3;-1)-(-1;2;2)=(2;1;-3)$

En este caso, el vector $v_3=(2;1;-3)$ es combinación lineal de los vectores $v_1=(1;3;-1)$ y $v_2=(-1;2;2)$

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2);(2;1;-3)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2)\}$ pues $(2;1;-3)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$.

8) En este caso, los vectores son los mismos del ejercicio 7)

$(2;1;-3)=(1;3;-1)-(-1;2;2)$

El vector $v_3=(2;1;-3)$ es combinación lineal de los vectores $v_1=(1;3;-1)$ y $v_2=(-1;2;2)$

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2);(2;1;-3)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2)\}$ pues $(2;1;-3)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$.

9) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-2;4;2)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(1;-2;-1)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(-2;4;2)+\lambda_2\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(1;-2;-1)$

$(0;0;0)=(-2\lambda_1;4\lambda_1;2\lambda_1)+(-\lambda_2;2\lambda_2;2\lambda_2)+(\lambda_3;-2\lambda_3;-\lambda_3)$

$(0;0;0)=(-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3;4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)$

$$\begin{cases}-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=0\\2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-&1&1\\4&2&-&2\\2&2&-&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-&1&1\\0&0&&0\\0&1&&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}-2\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_3=2\lambda_1\\\lambda_2=2\end{cases}$$

. Los vectores son linealmente dependientes, entonces la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es:

$$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(-2;4;2)+0\cdot(-1;2;2)+2\lambda_1\cdot(1;-2;-1)$$

Despejando v_1 ya que λ_1 es la incógnita independiente del sistema:

$\lambda_1\cdot(-2;4;2)=-0\cdot(-1;2;2)-2\lambda_1\cdot(1;-2;-1)$ y dividiendo por $\lambda_1\neq 0$

$(-2;4;2)=-0\cdot(-1;2;2)-2\cdot(1;-2;-1)$ o bien

$(-2;4;2)=-2\cdot(1;-2;-1)$

En este caso, el vector $v_1=(-2;4;2)$ es combinación lineal sólo del vector $v_3=(1;-2;-1)$, es decir v_1 es múltiplo de v_3.

$\mathbb{S}=gen\{(-2;4;2);(-1;2;2);(1;-2;-1)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que

$\mathbb{S}=gen\{(-1;2;2);(1;-2;-1)\}$ pues $(-2;4;2)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$.

10) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;-2;-1)$ y $v_2=(-2;4;2)$

Veamos cómo se puede escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(0;0;0)=\lambda_1\cdot(1;-2;-1)+\lambda_2\cdot(-2;4;2)$

$(0;0;0)=(\lambda_1;-2\lambda_1;-\lambda_1)+(-2\lambda_2;4\lambda_2;2\lambda_2)$

$(0;0;0)=(\lambda_1-2\lambda_2;-2\lambda_1++4\lambda_2;-\lambda_1+2\lambda_2)$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=0\\-2\lambda_1+4\lambda_2=0\\-\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&-2&0\\-2&4&0\\-1&2&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\{\lambda_1-2\lambda_2=0\Rightarrow\{\lambda_1=2\lambda_2$$

Los vectores son linealmente dependientes, entonces la forma de escribir $0_{\mathbb{V}}$ como combinación lineal es:

$$(0;0;0)=2\lambda_2\cdot(1;-2;-1)+\lambda_2\cdot(-2;4;2)$$

Despejando v_2 ya que λ_2 es la incógnita independiente del sistema:

$-2\lambda_2\cdot(1;-2;-1)=\lambda_2\cdot(-2;4;2)$ y dividiendo por $\lambda_2\neq 0$

$-2\cdot(1;-2;-1)=(-2;4;2)$

En este caso, el vector $v_2=(-2;4;2)$ es combinación lineal sólo del vector $v_1=(1;-2;-1)$, es decir v_2 es múltiplo de v_1.

$\mathbb{S}=gen\{(1;-2;-1);(-2;4;2)\}$ y los vectores son L.D., entonces es equivalente a decir que

$\mathbb{S}=gen\{(1;-2;-1)\}$ pues $(-2;4;2)$ ya está incluido en el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal del generador de $\mathbb{S}$.

Propiedades de la independencia lineal: *(Demostraciones en el apéndice)*

1) Si el vector nulo, $0_{\mathbb{V}}$, pertenece a un conjunto de vectores, entonces el conjunto es L.D.

2) $\{v\}$, con $v\neq 0_{\mathbb{V}}$ es un conjunto L.I.

3) $\{v_1;v_2\}$, con $v_1\neq 0_{\mathbb{V}}$ y $v_2\neq 0_{\mathbb{V}}$ es un conjunto L.I. o bien son múltiplos, es decir, es un conjunto L.D.

4) Si $\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}$ es un conjunto L.I. y $w\notin gen\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}$ entonces $\{v_1;v_2;\cdots;v_k;w\}$ es un conjunto L.I.

5) Si $\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}$ es un conjunto L.I. y $w\in gen\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}$ entonces $\{v_1;v_2;\cdots;v_k;w\}$ es un conjunto L.D.; es decir:

Si w es combinación lineal de los vectores del conjunto $\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}$, entonces $gen\{v_1;v_2;\cdots;v_k\}=gen\{v_1;v_2;\cdots;v_k;w\}$

Proposición: *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean v_1, v_2 y v_3 vectores de $\mathbb{V}$. Son equivalentes:

a) $\{v_1; v_2; v_3\}$ es un conjunto L.I.

b) $\{v_1; k.v_2; v_3\}$ con $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ es un conjunto L.I.

c) $\{v_1 + k.v_2; v_2; v_3\}$ con $k \in \mathbb{R}$ es un conjunto L.I.

Estas propiedades son útiles para decidir si un conjunto de vectores es o no L.I. de una forma más rápida sin tener que plantear todo el tiempo la definición:

Con los ejemplos anteriores:

1) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (6;5)$ y $v_2 = (7;6)$
   Los dos vectores v_1 y v_2 a simple vista, no son múltiplos, entonces son L.I.

2) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;2)$, $v_2 = (2;-1)$ y $v_3 = (-2;4)$
   Acá tenemos tres vectores; ninguno de ellos es múltiplo de otro, pero como son tres, y no dos, es necesario plantear la definición para analizar si son L.I. o L.D.

3) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;-2)$ y $v_2 = (-2;4)$
   Los dos vectores v_1 y v_2 a simple vista, son múltiplos, $v_2 = -2v_1$ entonces son L.D.

4) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (3;-2)$ y $v_2 = (-6;4)$
   Los dos vectores v_1 y v_2 a simple vista, son múltiplos, $v_2 = -2v_1$ entonces son L.D.

5) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;2;1)$, $v_2 = (1;2;0)$ y $v_3 = (2;0;0)$
   Acá tenemos tres vectores; ninguno de ellos es múltiplo de otro, pero como son tres, y no dos, es necesario plantear la definición para analizar si son L.I. o L.D, como hicimos anteriormente.

6) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (-1;2;-1)$ y $v_2 = (2;1;1)$
   Los dos vectores v_1 y v_2 a simple vista, no son múltiplos, entonces son L.I.

7) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;3;-1)$, $v_2 = (-1;2;2)$ y $v_3 = (2;1;-3)$
   Otra vez, tenemos tres vectores; ninguno de ellos es múltiplo de otro, pero como son tres, y no dos, es necesario plantear la definición para analizar si son L.I. o L.D, como hicimos anteriormente.

8) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (-2;4;2)$, $v_2 = (-1;2;2)$ y $v_3 = (1;-2;-1)$
   Otra vez, tenemos tres vectores, pero se puede ver que $v_1 = -2v_3$, entonces podemos afirmar que el conjunto de los tres vectores es L.D.

9) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;-2;-1)$ y $v_2 = (-2;4;2)$
   Los dos vectores v_1 y v_2 a simple vista, son múltiplos, $v_2 = -2v_1$ entonces son L.D.

Reconocer si un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ de $\mathbb{V}$ es L.I. o L.D. es importante pues nos dice de qué manera se puede escribir un vector v que es combinación lineal de ellos:

- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un conjunto L.I. y v es combinación lineal de ellos, existen únicos escalares que permiten escribir a v como combinación lineal.
  $v \in \mathbb{V}$ es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_k$ entonces existen *únicos* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ que permitan expresarlo de la forma $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$.

- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un conjunto L.D. y v es combinación lineal de ellos, existen infinitos escalares para escribir a v como combinación lineal.
  $v \in \mathbb{V}$ es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_k$ entonces existen *infinitos* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ que permitan expresarlo de la forma $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$.

De los ejemplos anteriores:

1) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;2;1)$, $v_2 = (1;2;0)$ y $v_3 = (2;0;0)$ y sea $v = (3;4;-1)$

   Vimos anteriormente que v_1, v_2 y v_3 son L.I., y que v es combinación lineal de ellos, entonces existen *únicos* λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

   $(3;4;-1) = \lambda_1 \cdot (1;2;1) + \lambda_2 \cdot (1;2;0) + \lambda_3 \cdot (2;0;0)$ y cuando los hallamos obtuvimos:

   $$(3;4;-1) = -1 \cdot (1;2;1) + 3 \cdot (1;2;0) + \frac{1}{2} \cdot (2;0;0)$$

2) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;3;-1)$, $v_2 = (-1;2;2)$ y $v_3 = (2;1;-3)$ y sea $v = (5;5;-7)$

   Vimos anteriormente que v_1, v_2 y v_3 son L.D., y que v es combinación lineal de ellos, entonces existen *infinitos* λ_1, λ_2 y λ_3 que verifiquen:

   $(5;5;-7) = \lambda_1 \cdot (1;3;-1) + \lambda_2 \cdot (-1;2;2) + \lambda_3 \cdot (2;1;-3)$ y cuando los hallamos obtuvimos:

   $$(5;5;-7) = (3 - \lambda_3) \cdot (1;3;-1) + (-2 + \lambda_3) \cdot (-1;2;2) + \lambda_3 \cdot (2;1;-3)$$

También vale la recíproca:

- Si un vector $v \in \mathbb{V}$ es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_k$, de manera que existen *únicos* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ que permitan expresarlo de la forma $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un conjunto L.I.
  En este caso, es porque si existen únicos escalares, el sistema es un S.C.D., y por lo tanto, el sistema homogéneo asociado (definición de independencia lineal) tiene por única solución a escalares nulos.

- Si un vector $v \in \mathbb{V}$ es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_k$, de manera que existen *infinitos* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ que permitan expresarlo de la forma $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un conjunto L.D.
  En este caso, es porque si existen infinitos escalares, el sistema es un S.C.I., y por lo tanto, el sistema homogéneo asociado (definición de dependencia lineal) tiene infinitas soluciones.

Conjunto de generadores:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Se dice que dicho conjunto es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$ si, *para todo* $v \in \mathbb{V}$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ que permiten escribir a v como combinación lineal de ellos:

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ genera $\mathbb{V} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, v \in \mathbb{V},\ \ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}:\ v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$

En caso de que no existan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ para todo $v \in \mathbb{V}$, como todo conjunto de vectores genera "algo", como vimos antes, entonces, generan un subespacio de $\mathbb{V}$. Es este caso, se pueden obtener las ecuaciones de dicho subespacio.

Retomando los ejemplos anteriores:

1) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (6;5)$ y $v_2 = (7;6)$

   Escribamos $v = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

   $(x_1; x_2) = \lambda_1 \cdot (6;5) + \lambda_2 \cdot (7;6)$

   $(x_1; x_2) = (6\lambda_1 + 7\lambda_2; 5\lambda_1 + 6\lambda_2)$

   $$\begin{cases} 6\lambda_1 + 7\lambda_2 = x_1 \\ 5\lambda_1 + 6\lambda_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & x_1 \\ 5 & 6 & x_2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & x_1 \\ 0 & \frac{1}{6} & x_2 - \frac{5}{6}x_1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 36x_1 - 42x_2 \\ 0 & \frac{1}{6} & x_2 - \frac{5}{6}x_1 \end{array}\right)$$

   Este sistema es un S.C.D. para todo valor de x_1 y x_2, por lo tanto, todo $v = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, es decir, $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$ y además, la combinación lineal es única, por lo tanto v_1 y v_2 son L. I., conclusión a la que ya habíamos llegado.

2) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;2)$, $v_2 = (2;-1)$ y $v_3 = (-2;4)$

   Escribamos $v = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

   $(x_1; x_2) = \lambda_1 \cdot (1;2) + \lambda_2 \cdot (2;-1) + \lambda_3 \cdot (-2;4)$

   $(x_1; x_2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3; 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3)$

   $$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 2 & -1 & 4 & x_2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & -5 & 8 & x_2 - 2x_1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 \\ 0 & -5 & 8 & x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

   Este sistema es un S.C.I. para todo valor de x_1 y x_2, por lo tanto, todo $v = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$ pero la combinación lineal no es única, por lo tanto v_1, v_2 y v_3 son L. D., conclusión a la que ya habíamos llegado.

3) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;-2)$ y $v_2 = (-2;4)$

   Escribamos $v = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

   $(x_1; x_2) = \lambda_1 \cdot (1;-2) + \lambda_2 \cdot (-2;4)$

$(x_1;x_2)=(\lambda_1-2\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=x_1\\-2\lambda_1+4\lambda_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&-2&x_1\\-2&4&x_2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&-2&x_1\\0&0&x_2+2x_1\end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 y x_2 que verifiquen: $x_2+2x_1=0$.

Por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2.

Sólo son combinación lineal de v_1 y v_2 aquellos $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ que verifiquen: $x_2+2x_1=0$ y además, la combinación lineal no es única, pues si $x_2+2x_1=0$, el sistema es un S.C.I., los vectores son L.D. Esta es la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^2$ que ellos generan:

$\mathbb{S}=gen\{(1;-2);(-2;4)\}$

$\mathbb{S}=gen\{(1;-2)\}$

$\mathbb{S}=\{v\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2+2x_1=0\}$

Son las tres formas equivalentes de escribir al subespacio.

4) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(3;-2)$ y $v_2=(-6;4)$

Escribamos $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(x_1;x_2)=\lambda_1\cdot(3;-2)+\lambda_2\cdot(-6;4)$

$(x_1;x_2)=(3\lambda_1-6\lambda_2;-2\lambda_1+4\lambda_2)$

$$\begin{cases}3\lambda_1-6\lambda_2=x_1\\-2\lambda_1+4\lambda_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}3&-6&x_1\\-2&4&x_2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}3&-6&x_1\\0&0&x_2+\frac{2}{3}x_1\end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 y x_2 que verifiquen: $x_2+\frac{2}{3}x_1=0$.

Por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2.

Sólo son combinación lineal de v_1 y v_2 aquellos $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ que verifiquen: $x_2+\frac{2}{3}x_1=0$ y además, la combinación lineal no es única, pues si $x_2+\frac{2}{3}x_1=0$, el sistema es un S.C.I., los vectores son L.D. (como ya vimos). Esta es la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^2$ que ellos generan:

$\mathbb{S}=gen\{(3;-2);(-6;4)\}$

$\mathbb{S}=gen\{(3;-2)\}$

$\mathbb{S}=\{v\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2+\frac{2}{3}x_1=0\}$

Son las tres formas equivalentes de escribir al subespacio.

5) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$

Escribamos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(x_1;x_2;x_3)=\lambda_1\cdot(1;2;1)+\lambda_2\cdot(1;2;0)+\lambda_3\cdot(2;0;0)$

$(x_1;x_2;x_3)=(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2;\lambda_1)$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 = x_1 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2 \quad = x_2 \\ \lambda_1 \quad = x_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x_1-x_3 \\ 0 & 2 & 0 & x_2-2x_3 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & x_1-\frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 2 & 0 & x_2-2x_3 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right)$$

Este sistema es un S.C.D. para todo valor de x_1 , x_2 y x_3, por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 y además, la combinación lineal es única, por lo tanto v_1, v_2 y v_3 son L. I., conclusión a la que ya habíamos llegado.

6) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$

Escribamos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(x_1;x_2;x_3)=\lambda_1\cdot(-1;2;-1)+\lambda_2\cdot(2;1;1)$

$(x_1;x_2;x_3)=(-\lambda_1+2\lambda_2;2\lambda_1+\lambda_2;-\lambda_1+\lambda_2)$

$$\begin{cases} -\lambda_1+2\lambda_2 = x_1 \\ 2\lambda_1+\lambda_2 = x_2 \\ -\lambda_1+\lambda_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1-2x_3 \\ 3 & 0 & x_2-x_3 \\ -1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1-2x_3 \\ 0 & 0 & -3x_1+x_2+5x_3 \\ 0 & 1 & x_1-x_3 \end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 , x_2 y x_3 que verifiquen: $-3x_1+x_2+5x_3=0$.

Por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2.

Sólo son combinación lineal de v_1 y v_2 aquellos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ que verifiquen: $-3x_1+x_2+5x_3=0$ y además, la combinación lineal es única, pues si $-3x_1+x_2+5x_3=0$, el sistema es un S.C.D., los vectores son L.I. (como ya vimos). Esta es la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que ellos generan:

$\mathbb{S}=gen\{(-1;2;-1);(2;1;1)\}$

$\mathbb{S}=\{v\in\mathbb{R}^3 / -3x_1+x_2+5x_3=0\}$

Son las dos formas equivalentes de escribir al subespacio.

7) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;3;-1)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(2;1;-3)$

Escribamos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(x_1;x_2;x_3)=\lambda_1\cdot(1;3;-1)+\lambda_2\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(2;1;-3)$

$(x_1;x_2;x_3)=(\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3;3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3;-\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3)$

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=x_1 \\ 3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=x_2 \\ -\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x_1 \\ 3 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -3 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x_1 \\ 0 & 5 & -5 & x_2-3x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_3+x_1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_3+2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -8x_1+x_2-5x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_3+x_1 \end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 , x_2 y x_3 que verifiquen: $-8x_1+x_2-5x_3=0$.

Por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Sólo son combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 aquellos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ que verifiquen: $-8x_1+x_2-5x_3=0$, pero la combinación lineal no es única, pues si $-8x_1+x_2-5x_3=0$, el sistema es un S.C.I., los vectores son L.D. (como ya vimos). Esta es la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que ellos generan:

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2);(2;1;-3)\}$

$\mathbb{S}=gen\{(1;3;-1);(-1;2;2)\}$

$\mathbb{S}=\{v\in\mathbb{R}^3 / -3x_1+x_2+5x_3=0\}$

Son tres formas equivalentes de escribir al subespacio.

8) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-2;4;2)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(1;-2;-1)$

Escribamos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3:

$(x_1;x_2;x_3)=\lambda_1\cdot(-2;4;2)+\lambda_2\cdot(-1;2;2)+\lambda_3\cdot(1;-2;-1)$

$(x_1;x_2;x_3)=(-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3;4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3;2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)$

$$\begin{cases} -2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=x_1 \\ 4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=x_2 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & x_1 \\ 4 & 2 & -2 & x_2 \\ 2 & 2 & -1 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2+2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3+x_1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & x_3+2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2+2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3+x_1 \end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 , x_2 y x_3 que verifiquen: $x_2+2x_1=0$.

Por lo tanto, todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Sólo son combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 aquellos $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ que verifiquen: $x_2+2x_1=0$, pero la combinación lineal no es única, pues si $x_2+2x_1=0$, el sistema es un S.C.I., los vectores son L.D. (como ya vimos). Esta es la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que ellos generan:

$\mathbb{S}=gen\{(-2;4;2);(-1;2;2);(1;-2;-1)\}$

$\mathbb{S} = gen\{(-1;2;2);(1;-2;-1)\}$

$\mathbb{S} = \{v \in \mathbb{R}^3 / x_2 + 2x_1 = 0\}$

Son tres formas equivalentes de escribir al subespacio.

9) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1;-2;-1)$ y $v_2 = (-2;4;2)$

Escribamos $v = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$(x_1;x_2;x_3) = \lambda_1 \cdot (1;-2;-1) + \lambda_2 \cdot (-2;4;2)$

$(x_1;x_2;x_3) = (\lambda_1 - 2\lambda_2; -2\lambda_1 + +4\lambda_2; -\lambda_1 + 2\lambda_2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = x_1 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = x_2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & x_1 \\ -2 & 4 & x_2 \\ -1 & 2 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 \end{array}\right)$$

Este sistema es un S.I., excepto para aquellos valores de x_1 , x_2 y x_3 que verifiquen: $x_2 + 2x_1 = 0$ y $x_3 + x_1 = 0$ simultámeamente.

Por lo tanto, todo $v = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3$ NO se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Sólo son combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 aquellos $v = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifiquen: $\begin{cases} x_2 + 2x_1 = 0 \\ x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$, pero la combinación lineal no es única, pues si $\begin{cases} x_2 + 2x_1 = 0 \\ x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$, el sistema es un S.C.I., los vectores son L.D. (como ya vimos). Este es el sistema de ecuaciones del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que ellos generan:

$\mathbb{S} = gen\{(1;-2;-1);(-2;4;2)\}$

$\mathbb{S} = gen\{(1;-2;-1)\}$

$\mathbb{S} = \{v \in \mathbb{R}^3 / x_2 + 2x_1 = 0; x_3 + x_1 = 0\}$

Son tres formas equivalentes de escribir al subespacio.

Definición de Base:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. El conjunto B se denomina *base* de $\mathbb{V}$ se verifica que:

- B es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$.
- B es un conjunto linealmente independiente.

Volviendo a retomar los ejemplos anteriores:

1) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (6;5)$ y $v_2 = (7;6)$

Vimos que para todo $v = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$, v es como combinación lineal de v_1 y v_2 y además vimos que v_1 y v_2 son L.I., entonces $B = \{(6;5),(7;6)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2) En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1;2)$, $v_2 = (2;-1)$ y $v_3 = (-2;4)$

Vimos que para todo $v = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$, v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, pero v_1, v_2 y v_3 son L.D., entonces $B = \{(1;2),(2;-1),(-2;4)\}$ *no* es una base de $\mathbb{R}^2$.

3) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;-2)$ y $v_2=(-2;4)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $B=\{(1;-2),(-2;4)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^2$.

4) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(3;-2)$ y $v_2=(-6;4)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $B=\{(3;-2),(-6;4)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^2$.

5) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$
Vimos que para todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$, v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 y además vimos que v_1, v_2 y v_3 son L.I., entonces $B=\{(1;2;1),(1;2;0),(2;0;0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

6) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $B=\{(-1;2;-1),(2;1;1)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

7) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;3;-1)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(2;1;-3)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, entonces v_1, v_2 y v_3 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $B=\{(1;3;-1),(-1;2;2),(2;1;-3)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

8) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-2;4;2)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(1;-2;-1)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, entonces v_1, v_2 y v_3 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $B=\{(-2;4;2),(-1;2;2),(1;-2;-1)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

9) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;-2;-1)$ y $v_2=(-2;4;2)$
Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $B=\{(1;-2;-1),(-2;4;2)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

Proposición: *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, entonces, para todo $v\in\mathbb{V}$, existen únicos escalares $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ que verifican $v=\lambda_1.v_1+\lambda_2.v_2+\cdots+\lambda_n.v_n$.

Propiedad: *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $B'=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ otra base de $\mathbb{V}$, siendo $B\neq B'$, entonces $n=m$, es decir, tienen la misma cantidad de vectores.
Un espacio vectorial $\mathbb{V}\neq\{0\}$ es de dimensión finita, si existe un conjunto finito $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ que es base de $\mathbb{V}$.
En este caso:
- Cualquier conjunto de más de n elementos es un conjunto L.D.
- Cualquier conjunto de menos de n elementos no genera $\mathbb{V}$.

Importante:

Si dos bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ están formadas por los mismos elementos pero en distinto orden, se las considera bases distintas. Es decir, una base es un conjunto de generadores linealmente independientes y *ordenados*.

Definición de Dimensión:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, como la base de $\mathbb{V}$ tiene n elementos, entonces n es la dimensión de $\mathbb{V}$.
Es decir, la dimensión de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es la cantidad de elementos que tiene cualquier base de $\mathbb{V}$.

Notación: $\dim(\mathbb{V})=n$

Por lo tanto, decir que $\dim(\mathbb{V})=n$ es equivalente a decir que n vectores forman una base de $\mathbb{V}$ y equivalente a decir que n vectores son generadores linealmente independientes de $\mathbb{V}$.

Observación:

Si $\mathbb{V}=\{0\}$, entonces $\mathbb{V}$ no tiene base y se considera por convención, que $\dim(\mathbb{V})=0$

Cualquier conjunto de menos de n elementos no genera $\mathbb{V}$, pero sí genera un subespacio de $\mathbb{V}$. Si además este conjunto es linealmente independiente, formaría una base de dicho subespacio.

Retomando nuevamente los ejemplos anteriores:

1) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(6;5)$ y $v_2=(7;6)$
   Vimos que para todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$, v es como combinación lineal de v_1 y v_2 y además vimos que v_1 y v_2 son L.I., entonces $B=\{(6;5),(7;6)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $\dim(\mathbb{R}^2)=2$.

2) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;2)$, $v_2=(2;-1)$ y $v_3=(-2;4)$

Vimos que para todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$, v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, pero v_1, v_2 y v_3 son L.D., entonces $B=\{(1;2),(2;-1),(-2;4)\}$ *no* es una base de $\mathbb{R}^2$.

En este caso podríamos extraer una base de $\mathbb{R}^2$ puesto que B es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$.

Por el ejercicio (1) sabemos que $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, entonces bastaría con tomar dos elementos L.I. de B para tener una base de $\mathbb{R}^2$:

$B_1=\{(1;2),(2;-1)\}$

$B_2=\{(1;2),(-2;4)\}$

$B3=\{(2;-1),(-2;4)\}$

Cualquiera de estos tres conjuntos es base de $\mathbb{R}^2$.

3) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(1;-2)$ y $v_2=(-2;4)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $\{(1;-2),(-2;4)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^2$.

En este caso podemos extraer un conjunto linealmente independiente de $\{(1;-2),(-2;4)\}$ para obtener una base de un subespacio $\mathbb{S}$, el que estos vectores generan:

$B_{1\mathbb{S}}=\{(1;-2)\}$

$B_{2\mathbb{S}}=\{(-2;4)\}$

Cualquiera de esos dos conjuntos es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^2$, y $\dim(\mathbb{S})=1$.

4) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $v_1=(3;-2)$ y $v_2=(-6;4)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $\{(3;-2),(-6;4)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^2$.

En este caso podemos extraer un conjunto linealmente independiente de $\{(3;-2),(-6;4)\}$ para obtener una base de un subespacio $\mathbb{S}$, el que estos vectores generan:

$B_{1\mathbb{S}}=\{(3;-2)\}$

$B_{2\mathbb{S}}=\{(-6;4)\}$

Cualquiera de esos dos conjuntos es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^2$, y $\dim(\mathbb{S})=1$.

5) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;2;1)$, $v_2=(1;2;0)$ y $v_3=(2;0;0)$

Vimos que para todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$, v como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 y además vimos que v_1, v_2 y v_3 son L.I., entonces $B=\{(1;2;1),(1;2;0),(2;0;0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

6) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-1;2;-1)$ y $v_2=(2;1;1)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\{(-1;2;-1),(2;1;1)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

Pero por otro lado, v_1 y v_2 son L.I., entonces $\{(-1;2;-1),(2;1;1)\}$ es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ que ellos generan.

$B_{\mathbb{S}}=\{(-1;2;-1),(2;1;1)\}$ y $\dim(\mathbb{S})=2$

7) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;3;-1)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(2;1;-3)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, entonces v_1, v_2 y v_3 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\{(1;3;-1),(-1;2;2),(2;1;-3)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

En este caso podemos extraer un conjunto linealmente independiente de $\{(1;3;-1),(-1;2;2),(2;1;-3)\}$ para obtener una base de un subespacio $\mathbb{S}$, el que estos vectores generan:

$B_{1\mathbb{S}}=\{(1;3;-1),(-1;2;2)\}$

$B_{2\mathbb{S}}=\{(1;3;-1),(2;1;-3)\}$

$B_{3\mathbb{S}}=\{(-1;2;2),(2;1;-3)\}$

Cualquiera de esos tres conjuntos es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathbb{S})=2$.

8) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(-2;4;2)$, $v_2=(-1;2;2)$ y $v_3=(1;-2;-1)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, entonces v_1, v_2 y v_3 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\{(-2;4;2),(-1;2;2),(1;-2;-1)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$.

En este caso podemos extraer un conjunto linealmente independiente de $\{(-2;4;2),(-1;2;2),(1;-2;-1)\}$ para obtener una base de un subespacio $\mathbb{S}$, el que estos vectores generan:

$B_{1\mathbb{S}}=\{(-2;4;2),(-1;2;2)\}$

$B_{2\mathbb{S}}=\{(-1;2;2),(1;-2;-1)\}$

Cualquiera de esos dos conjuntos es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathbb{S})=2$.

En este caso, $\{(-2;4;2),(1;-2;-1)\}$ NO es base del subespacio $\mathbb{S}$ que v_1, v_2 y v_3, puesto que no son L.I.

9) En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1;-2;-1)$ y $v_2=(-2;4;2)$

Vimos que *no* todo $v=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$ es como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 no generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\{(1;-2;-1),(-2;4;2)\}$ *no* es base de $\mathbb{R}^3$, pero además el conjunto tampoco es L.I..

En este caso podemos extraer un conjunto linealmente independiente de $\{(1;-2;-1),(-2;4;2)\}$ para obtener una base de un subespacio $\mathbb{S}$, el que estos vectores generan:

$B_{1\mathbb{S}} = \{(1;-2;-1)\}$

$B_{2\mathbb{S}} = \{(-2;4;2)\}$

Cualquiera de esos dos conjuntos es base del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathbb{S}) = 1$.

Definición de coordenadas:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Para todo $v \in \mathbb{V}$, existen únicos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ que permiten escribir a v como combinación lineal de los elementos de la base B de la forma $v = \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \cdots + \lambda_n.v_n$.

Se denomina coordenadas del vector v en base B al vector de $\mathbb{R}^n$ formado por los escalares de la combinación lineal: $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

Notación: $[v]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

Observación:

Las coordenadas de un vector $v \in \mathbb{V}$ dependen de la base B con la que se está trabajando y del orden en que están dados los vectores en dicha base.

Ejemplos:

1) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ y sea $v = (12,3,-8)$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$(12,3,-8) = \lambda_1.(1,0,0) + \lambda_2.(0,1,0) + \lambda_3.(0,0,1)$

$(12,3,-8) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -8 \end{cases}$$

Entonces $[(12,3,-8)]_B = (12,3,-8)$

La base en la cual las coordenadas coinciden con las componente del vector se denomina base canónica y generalmente se nota con E. En este caso $E = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, entonces $E = \{(1,0);(0,1)\}$

Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, entonces $E = \{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0)(0,0,0,1)\}$

2) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(0,0,1);(1,0,0);(0,1,0)\}$ y sea $v=(12,3,-8)$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$$(12,3,-8)=\lambda_1.(0,0,1)+\lambda_2.(1,0,0)+\lambda_3.(0,1,0)$$

$$(12,3,-8)=(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1)$$

$$\begin{cases}\lambda_2=12\\ \lambda_3=3\\ \lambda_1=-8\end{cases}$$

Entonces $\left[(12,3,-8)\right]_B=(-8,12,3)$

Como a pesar de que B tiene los mismos elementos que la base canónica, pero al estar en otro orden las coordenadas son otras.

3) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,1,1);(1,1,0);(2,0,0)\}$ y sea $v=(12,3,-8)$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$$(12,3,-8)=\lambda_1.(1,1,1)+\lambda_2.(1,1,0)+\lambda_3.(2,0,0)$$

$$(12,3,-8)=(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=12\\ \lambda_1+\lambda_2=3\\ \lambda_1=-8\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&12\\1&1&0&3\\1&0&0&-8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&20\\0&1&0&11\\1&0&0&-8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&2&9\\0&1&0&11\\1&0&0&-8\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}2\lambda_3=9\\ \lambda_2=11\\ \lambda_1=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_3=\frac{9}{2}\\ \lambda_2=11\\ \lambda_1=-8\end{cases}$$

Entonces $\left[(12,3,-8)\right]_B=\left(-8,11,\dfrac{9}{2}\right)$

4) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $B=\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ y sea $v=\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$$\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}=\lambda_1.\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}+\lambda_2.\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}+\lambda_3.\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_4.\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_1-\lambda_2 & -\lambda_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=5\\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=-3\\ \lambda_1-\lambda_2=2\\ -\lambda_1=1\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}2&2&2&3&5\\1&1&-1&1&-3\\1&-1&0&0&2\\-1&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&2&2&3&7\\0&1&-1&1&-2\\0&-1&0&0&3\\-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&0&2&3&13\\0&0&-1&1&1\\0&-1&0&0&3\\-1&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&0&10\\0&0&-1&1&1\\0&-1&0&0&3\\-1&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&0&10\\0&0&0&1&3\\0&-1&0&0&3\\-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 5\lambda_3 = 10 \\ \lambda_4 = 3 \\ -\lambda_2 = 3 \\ -\lambda_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = 3 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$$

Entonces $\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = (-1,-3,2,3)$

5) $\mathbb{V} = P_2[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] / gr(p) \leq 2 \vee \text{p=0}\}$, $B = \{1; x; x^2\}$ y sea $v = -2x^2 + 8x + 3$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$-2x^2 + 8x + 3 = \lambda_1.1 + \lambda_2.x + \lambda_3.x^2$

Como dos polinomios son iguales si los coeficientes de monomios semejantes son iguales, entonces:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

Entonces $\left[-2x^2 + 8x + 3\right]_B = (3, 8, -2)$

6) $\mathbb{V} = P_2[x]$, $B = \{x^2 + 2; 2x + 1; x^2 - 3\}$ y sea $v = -2x^2 + 8x + 3$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$-2x^2 + 8x + 3 = \lambda_1.(x^2 + 2) + \lambda_2.(2x + 1) + \lambda_3.(x^2 - 3)$

$-2x^2 + 8x + 3 = \lambda_1 x^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x + \lambda_2 + \lambda_3 x^2 - 3\lambda_3$

$-2x^2 + 8x + 3 = (\lambda_1 + \lambda_3)x^2 + (2\lambda_2)x + (2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3)$

Como dos polinomios son iguales si los coeficientes de monomios semejantes son iguales, entonces:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_2 = 8 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{5} \\ 10\lambda_3 = -6 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{5} \\ \lambda_3 = -\frac{3}{5} \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Entonces $\left[-2x^2 + 8x + 3\right]_B = \left(-\frac{7}{5}, 4, -\frac{3}{5}\right)$

Proposición: *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, entonces:

a) $[v+w]_B=[v]_B+[w]_B$ para todo $v\in\mathbb{V}$ y $w\in\mathbb{V}$

b) $[\lambda.v]_B=\lambda.[v]_B$ para todo $v\in\mathbb{V}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$

Proposición: *(Demostración en el apéndice)*

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ un conjunto de $\mathbb{V}$ linealmente independiente, entonces $\{[w_1]_B,[w_2]_B,\cdots,[w_m]_B\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$.

Esta propiedad es muy útil porque se puede trabajar en cualquier espacio vectorial $\mathbb{V}$ a través de sus coordenadas en una base, que significa trabajar con vectores de $\mathbb{R}^n$.

Matriz de cambio de base:

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$.
Como B es una base, todo vector de $\mathbb{V}$ se escribe en forma única como combinación lineal de los elementos de la base. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que planteamos para buscar las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{V}$ en una base, es un sistema compatible determinado (S.C.D.) y cuadrado.

Como vimos en la Unidad 1, podemos escribir este sistema en forma matricial: $A.X=B$
Si A es una matriz cuadrada y el sistema es un S.C.D., entonces A es inversible y podemos resolver el sistema por el método matricial: $X=A^{-1}.B$

En este caso:
Si tomamos un vector $v\in\mathbb{V}$ y buscamos sus coordenadas en base B, planteamos la combinación lineal: $v=\lambda_1.v_1+\lambda_2.v_2+\cdots+\lambda_n.v_n$.

- La dimensión de $\mathbb{V}$ es n, pues la base de $\mathbb{V}$ está formada por n vectores, cada vector tiene n componentes. Vamos a tener una ecuación por cada componente.
- Como hay n vectores, tenemos n incógnitas.

Por lo tanto, el sistema es cuadrado.

- Si lo pensamos desde $\mathbb{R}^n$ para comenzar, podemos ver que:
  - En la matriz asociada al sistema, como cada columna representa los coeficientes de cada ecuación para una misma incógnita, entonces las columnas son los vectores de la base B.
  - Las incógnitas del sistema son las coordenadas que buscamos del vector $v\in\mathbb{R}^n$.
  - Las constantes son las componentes del vector $v\in\mathbb{R}^n$.

  Entonces tenemos el sistema escrito en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz cuyas columnas son los elementos de la base } B}.\underbrace{X}_{\text{Coordenadas del vector } v \text{ en la base } B} = \underbrace{v^t}_{\text{Vector } v \text{ escrito como vector columna}}$$

$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada e inversible, pues los vectores de la base son L.I..
Por lo tanto, alcanza con multiplicar miembro a miembro por su inversa para obtener las coordenadas:

$$X = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^{-1} v^t \qquad \text{donde} \quad X = \left[v^t\right]_B$$

A esta matriz $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ se la conoce como *matriz de cambio de base de la base* B *a la base canónica*, pues multiplicando por ella a las coordenadas de un vector v en base B, obtenemos las coordenadas del mismo vector en base canónica.

Notación: $C_{BE} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ *matriz de cambio de base de la base* B *a la base canónica.*

Entonces en definitiva tenemos: $C_{BE}.X = v^t \quad \Rightarrow \quad X = C_{BE}^{-1}.v^t$ siendo $X = \left[v^t\right]_B$

Por otro lado C_{BE}^{-1} es la matriz que multiplicada por un vector en base canónica, nos devuelve las coordenadas del mismo en la base B, entonces la podríamos denominar como *matriz de cambio de base de la base canónica a la base* B.

$$C_{EB} = C_{BE}^{-1} \qquad \textit{matriz de cambio de base de la base canónica a la base } B.$$

- Si lo pensamos desde $\mathbb{V}$, un espacio vectorial cualquiera que no sea $\mathbb{R}^n$, la idea es la misma pero, en general, las columnas de la matriz C_{EB} son las coordenadas en la base canónica del mismo espacio para poder tener vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & \cdots & [v_n]_E \end{pmatrix}.X = \left[v^t\right]_E$$

$$X = \begin{pmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & \cdots & [v_n]_E \end{pmatrix}^{-1}.\left[v^t\right]_E \qquad \text{siendo} \quad X = \left[v^t\right]_B$$

Este caso es más fácil de comprender a través de los ejemplos.

La ventaja de buscar coordenadas utilizando la matriz de cambio de base es poder buscar las coordenadas de varios vectores sin tener que resolver cada sistema, sólo buscamos la inversa una vez y la multiplicamos por cada vector.

Si conocemos las coordenadas de un vector en una base, sólo multiplicamos la matriz de cambio de base por dichas coordenadas para conocer al vector: $C_{BE}.\left[v^t\right]_B = v^t$

Ejemplos:

1) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ y sea $v=(12,3,-8)$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$(12,3,-8)=\lambda_1.(1,0,0)+\lambda_2.(0,1,0)+\lambda_3.(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pues } B=E \text{, entonces}$$

$$C_{EB} = C_{BE}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y entonces } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Entonces $\left[(12,3,-8)\right]_B = (12,3,-8)$

2) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(0,0,1);(1,0,0);(0,1,0)\}$ y sea $v=(12,3,-8)$
Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:
$(12,3,-8)=\lambda_1.(0,0,1)+\lambda_2.(1,0,0)+\lambda_3.(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{donde } C_{BE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{EB} = C_{BE}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Entonces $\left[(12,3,-8)\right]_B = (-8,12,3)$

3) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,1,1);(1,1,0);(2,0,0)\}$ y sea $v=(12,3,-8)$
Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:
$(12,3,-8)=\lambda_1.(1,1,1)+\lambda_2.(1,1,0)+\lambda_3.(2,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{donde } C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{EB} = C_{BE}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

Entonces $\left[(12,3,-8)\right]_B = \left(-8,11,\frac{9}{2}\right)$

4) Sea $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $B=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y sea $v=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:
$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Como ahora no tenemos vectores de $\mathbb{R}^n$, sino que son de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, vamos primero a buscar las coordenadas de todos los vectores que tenemos de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ en base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
$E=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_B = (2,1,1,-1)$; $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_B = (2,1,-1,0)$; $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B = (2,-1,0,0)$;

$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B = (3,1,0,0)$ que son las coordenadas de los vectores de la base B en base canónica, y $\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = (5,-3,2,1)$ que son las coordenadas de v en base canónica.

Con estos vectores de $\mathbb{R}^4$ trabajaremos armando la matriz de cambio de base C_{BE}:

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde $C_{BE} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$C_{EB} = C_{BE}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Entonces $\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = (-1,-3,2,3)$

5) $\mathbb{V} = P_2[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] / gr(p) \le 2 \vee \text{p=0}\}$, $B = \{1; x; x^2\}$ y sea $v = -2x^2 + 8x + 3$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$-2x^2 + 8x + 3 = \lambda_1.1 + \lambda_2.x + \lambda_3.x^2$

Como ahora no tenemos vectores de $\mathbb{R}^n$, sino que son de $P_2[x]$, necesitamos buscar las coordenadas de todos los vectores que tenemos de $P_2[x]$ en base canónica de $P_2[x]$: $E = \{1; x; x^2\}$, que es la base B. No es necesario, pero vamos a ver el planteo igual $[1]_B = (1,0,0)$; $[x]_B = (0,1,0)$; $[x^2]_B = (0,0,1)$ que son las coordenadas de los vectores de la base B en base canónica, y $[-2x^2 + 8x + 3]_B = (3,8,-2)$ que son las coordenadas de v en base canónica.

Con estos vectores de $\mathbb{R}^3$ trabajaremos armando la matriz de cambio de base C_{BE}:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ donde $C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pues $B = E$, entonces

$C_{EB} = C_{BE}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Entonces $[-2x^2 + 8x + 3]_B = (3,8,-2)$

6) $\mathbb{V} = P_2[x]$, $B = \{x^2 + 2; 2x + 1; x^2 - 3\}$ y sea $v = -2x^2 + 8x + 3$

Vamos a buscar las coordenadas de v en base B:

$-2x^2+8x+3=\lambda_1.\left(x^2+2\right)+\lambda_2.\left(2x+1\right)+\lambda_3.\left(x^2-3\right)$

Como ahora no tenemos vectores de $\mathbb{R}^n$, sino que son de $P_2\left[x\right]$, necesitamos buscar las coordenadas de todos los vectores que tenemos de $P_2\left[x\right]$ en base canónica de $P_2\left[x\right]$:

$E=\left\{1;x;x^2\right\}$

$\left[x^2+2\right]_B=\left(2,0,1\right)$; $\left[2x+1\right]_B=\left(1,2,0\right)$; $\left[x^2-3\right]_B=\left(-3,0,1\right)$ que son las coordenadas de los vectores de la base B en base canónica, y $\left[-2x^2+8x+3\right]_B=\left(3,8,-2\right)$ que son las coordenadas de v en base canónica.

Con estos vectores de $\mathbb{R}^3$ trabajaremos armando la matriz de cambio de base C_{BE}:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad C_{BE}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$C_{EB}=C_{BE}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ y entonces } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ 4 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces $\left[-2x^2+8x+3\right]_B=\left(-\frac{7}{5},4,-\frac{3}{5}\right)$

Los ejercicios sobre estos temas pueden ser infinitos ya que relaciona todos los temas y también los temas de la UNIDAD Nº 1.

Veamos algunos ejemplos con su resolución:

Ejemplos varios:

1) Dado el siguiente subespacio,

$\mathbb{S}=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_2+x_3=0; 3x_1+x_2+2x_4=0; x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0\right\}$

a) Decidir si el vector $v=\left(2,-2,2,-2\right)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

b) Decidir si el vector $w=\left(-3,3,-3,-3\right)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

c) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $u=\left(-2k+4,k-1,-k+3,k+2\right)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

d) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $y=\left(k-1,k+1,2k-3,k-4\right)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

e) Hallar una base de $\mathbb{S}$ y dar su dimensión.

Resolvamos cada ítem:

(a) Decidir si el vector $v=\left(2,-2,2,-2\right)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por ecuaciones, es decir, a través de las condiciones que cumplen las coordenadas de los vectores que pertenecen a él, sólo debemos ver si el vector v verifica estas condiciones:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 3x_1+x_2 \quad +2x_4=0 \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+2.(-2)+2 = 0 \ ✓ \\ 3.2+(-2) \quad +2.(-2)=0 \ ✓ \\ 2-3.(-2)-2.2+2.(-2)=0 \ ✓ \end{cases}$$

Como se verifican las tres ecuaciones de $\mathbb{S}$, podemos asegurar que $v\in\mathbb{S}$.

(b) Decidir si el vector $w=(-3,3,-3,-3)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Al igual que en el ítem anterior, como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por ecuaciones, es decir, a través de las condiciones que cumplen las coordenadas de los vectores que pertenecen a él, sólo debemos ver si el vector w verifica estas condiciones:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 3x_1+x_2 \quad +2x_4=0 \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+2.3+(-3) = 0 \ ✓ \\ 3.(-3)+3 \quad +2.(-3)=-12 \ ✗ \end{cases}$$

Como no se verifica la segunda ecuación de $\mathbb{S}$, no es necesario ver si verifica la tercera, ya podemos asegurar que $w\notin\mathbb{S}$.

(c) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $u=(-2k+4,k-1,-k+3,k+2)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

Para que el vector u pertenezca a $\mathbb{S}$, sus coordenadas deben verificar las tres ecuaciones de $\mathbb{S}$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 3x_1+x_2 \quad +2x_4=0 \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2k+4)+2.(k-1)+(-k+3) = \\ 3.(-2k+4)+(k-1) \quad +2.(k+2) = \\ (-2k+4)-3.(k-1)-2.(-k+3)+2.(k+2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2k+4+2k-2-k+3=0 \\ -6k+12+k-1+2.k+4=0 \\ -2k+4-3k+3+2k-6+2k+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-k=0 \\ -3k+15=0 \\ -k+5=0 \end{cases} \Rightarrow k=5$$

Por lo tanto, si $k=5$, el vector $u=(-6,4,-2,7)\in\mathbb{S}$

(d) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $y=(k-1,k+1,2k-3,k-4)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

Para que el vector u pertenezca a $\mathbb{S}$, sus coordenadas deben verificar las tres ecuaciones de $\mathbb{S}$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 3x_1+x_2 \quad +2x_4=0 \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-1)+2.(k+1)+(2k-3) \\ 3.(k-1)+(k+1) \quad +2.(k-4) \\ (k-1)-3.(k+1)-2.(2k-3)+2.(k-4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-1+2k+2+2k-3=0 \\ 3k-3+k+1+2.k-8=0 \\ k-1-3k-3-4k+6+2k-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k-2=0 \\ 6k-10=0 \\ -4k-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{5} \\ k=\dfrac{5}{3} \\ k=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ Absurdo}$$

En este caso, cualquiera sea el valor de $k\in\mathbb{R}$, el vector $y\notin\mathbb{S}$.

(e) Hallar una base de $\mathbb{S}$ y dar su dimensión.

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por ecuaciones, para buscar una base sólo hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \qquad\qquad =0 \\ 3x_1+x_2 \qquad\qquad +2x_4=0 \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \text{ entonces } \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \qquad\quad =0 \\ \quad -5x_2-3x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_4=\dfrac{5}{2}x_2+\dfrac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

Entonces, todo vector de $\mathbb{S}$ es de la forma:

$$s=\left(-2x_2-x_3, x_2, x_3, \frac{5}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)=\left(-2x_2, x_2, 0, \frac{5}{2}x_2\right)+\left(-x_3, 0, x_3, \frac{3}{2}x_3\right)$$

$$=x_2.\left(-2,1,0,\frac{5}{2}\right)+x_3.\left(-1,0,1,\frac{3}{2}\right)$$

Es decir, todo vector de $\mathbb{S}$ es combinación lineal de $\left(-2,1,0,\frac{5}{2}\right)$ y $\left(-1,0,1,\frac{3}{2}\right)$, (siempre que se resuelve bien un sistema de ecuaciones, el conjunto de vectores obtenidos es L.I.) por lo tanto, una base de $\mathbb{S}$ es $B_{\mathbb{S}}=\left\{\left(-2,1,0,\frac{5}{2}\right);\left(-1,0,1,\frac{3}{2}\right)\right\}$.

Como la base de $\mathbb{S}$ está conformada por dos vectores, entonces $Dim(\mathbb{S})=2$.

2) Dado el siguiente subespacio, $\mathbb{S}=gen\{(2,1,-3);(1,2,-1)\}$

a) Decidir si el vector $v=(-1,4,3)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

b) Decidir si el vector $w=(-3,2,1)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

c) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $u=(k,1,12)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

d) Hallar las condiciones de las coordenadas de los vectores que pertenecen a $\mathbb{S}$.

e) Dar su dimensión.

Resolviendo cada ítem:

(a) Decidir si el vector $v=(-1,4,3)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por generadores, entonces el vector v pertenece a $\mathbb{S}$ sólo si es combinación lineal de sus generadores, entonces, vamos a plantear dicha combinación lineal:

$$(-1,4,3)=\lambda_1.(2,1,-3)+\lambda_2.(1,2,-1)$$

La matriz que resuelve este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=3 \\ -\lambda_1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=3 \\ \lambda_1=-2 \end{cases}$$

Entonces: $(-1,4,3)=(-2).(2,1,-3)+3(1,2,-1)$, por lo tanto $v\in\mathbb{S}$

(b) Decidir si el vector $w=(-3,2,1)$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Nuevamente, como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por generadores, entonces el vector w pertenece a $\mathbb{S}$ sólo si es combinación lineal de sus generadores, entonces, vamos a plantear dicha combinación lineal:

$(-3,2,1)=\lambda_1.(2,1,-3)+\lambda_2.(1,2,-1)$

La matriz que resuelve este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 14 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ es un S.I.}$$

Entonces $w=(-3,2,1)\notin\mathbb{S}$

(c) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que el vector $u=(k,1,12)$ pertenezca a $\mathbb{S}$.

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por generadores, entonces el vector u pertenece a $\mathbb{S}$ sólo si es combinación lineal de sus generadores, entonces, vamos a pedirle u que sea combinación lineal de sus generadores:

$(k,1,12)=\lambda_1.(2,1,-3)+\lambda_2.(1,2,-1)$

La matriz que resuelve este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & k \\ -3 & 0 & 1-2k \\ -1 & 0 & 12+k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 3k+24 \\ 0 & 0 & -5k-35 \\ -1 & 0 & 12+k \end{array}\right)$$

Como u debe pertenecer a $\mathbb{S}$, el sistema debe ser compatible, entonces $-5k-35=0 \Rightarrow k=-7$ y además,

$$\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 3k+24 \\ 0 & 0 & -5k-35 \\ -1 & 0 & 12+k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=3 \\ -\lambda_1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=3 \\ \lambda_1=-5 \end{cases}$$

Entonces: $(-7,1,12)=(-5).(2,1,-3)+3(1,2,-1)$

(d) Hallar las condiciones de las coordenadas de los vectores que pertenecen a $\mathbb{S}$.

Las condiciones de las coordenadas de los vectores de $\mathbb{S}$ son las ecuaciones del subespacio $\mathbb{S}$.

Tomemos un vector $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ y pidámosle que sea combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$:

$(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1.(2,1,-3)+\lambda_2.(1,2,-1)$

La matriz que resuelve este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ -3 & -1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & x_1 \\ -3 & 0 & x_2-2x_1 \\ -1 & 0 & x_3+x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 3x_1+2x_3 \\ 0 & 0 & -5x_1+x_2-3x_3 \\ -1 & 0 & x_3+x_1 \end{array}\right)$$

Como queremos que (x_1,x_2,x_3) pertenezca a $\mathbb{S}$, el sistema debe ser compatible, entonces $-5x_1+x_2-3x_3=0$

Entonces $\mathbb{S}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / -5x_1+x_2-3x_3=0\}$

(e) Dar su dimensión.

Como $\mathbb{S}$ está generado por dos vectores L.I., entonces $Dim(\mathbb{S})=2$.

3) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el vector $v = (k-3, 3, 2k)$ pertenezca al subespacio $\mathbb{S} = gen\{(0,2,4);(0,1,2)\}$ y dar una base y la dimensión de $\mathbb{S}$.

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por generadores, entonces el vector v pertenece a $\mathbb{S}$ sólo si es combinación lineal de sus generadores, entonces, vamos a pedirle v que sea combinación lineal de sus generadores:

$(k-3, 3, 2k) = \lambda_1.(0,2,4) + \lambda_2.(0,1,2)$

La matriz que resuelve este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & k-3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & k-3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2k-6 \end{array}\right)$$

Como v debe pertenecer a $\mathbb{S}$, el sistema debe ser compatible, entonces $k-3=0$ y $2k-6=0 \;\Rightarrow\; k=3$ y además, con $k=3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 3 - 2\lambda_1$$

Entonces: $(0,3,6) = \lambda_1.(0,2,4) + (3-2\lambda_1)(0,1,2)$

La combinación lineal no es única, lo vectores son L.D.

Una base de $\mathbb{S}$ es $B_{\mathbb{S}} = \{(0,1,2)\}$ y $Dim(\mathbb{S}) = 1$.

4) Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto $\{(0,k,1);(1,0,k);(1,k,k+1)\}$ sea base de $\mathbb{R}^3$.

Para que el conjunto $\{(0,k,1);(1,0,k);(1,k,k+1)\}$ sea base de $\mathbb{R}^3$, como son tres vectores, alcanza con pedirles que sean L.I..

Entonces escribamos al vector nulo de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores del conjunto.

$(0,0,0) = \lambda_1.(0,k,1) + \lambda_2.(1,0,k) + \lambda_3.(1,k,k+1)$

La matriz ampliada del sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ 1 & k & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

y necesitamos que el sistema sea S.C.D., entonces el determinante de la matriz asociada debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \\ 1 & k & k+1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$0 + k^2 + k - 0 - 0 - k(k+1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - k^2 - k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \neq 0 \text{ Absurdo}$$

El determinante de la matriz asociada es 0 para todo $k \in \mathbb{R}$, entonces, cualquiera sea el valor de k, este conjunto nunca será base de $\mathbb{R}^3$.

5) Hallar base y dimensión del subespacio:

$\mathbb{S}=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / -x_1+x_3=0; x_1+4x_2-5x_3=0; -6x_1+7x_2-x_3=0\right\}$

Como el subespacio $\mathbb{S}$ está dado por ecuaciones, para buscar una base sólo hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x_1 \quad +x_3=0 \\ x_1+4x_2-5x_3=0 \\ -6x_1+7x_2-x_3=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \\ -6 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ entonces}$$

$$\begin{cases} -x_1+x_3=0 \\ -4x_1+4x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=x_1 \\ x_2=x_1 \end{cases}$$

Entonces, todo vector de $\mathbb{S}$ es de la forma:

$s=(x_1,x_1,x_1)=x_1.(1,1,1)$

Es decir, todo vector de $\mathbb{S}$ es combinación lineal de $(1,1,1)$, es decir, es múltiplo de $(1,1,1)$, por lo tanto, una base de $\mathbb{S}$ es $B_{\mathbb{S}}=\{(1,1,1)\}$.

Como la base de $\mathbb{S}$ está conformada por un vector, entonces $Dim(\mathbb{S})=1$.

6) Dado el conjunto $\{(1,k,k);(2,k,2k);(k,3k,-k)\}$

a) Hallar los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

b) Para los valores de k para los que no se forma una base de $\mathbb{R}^3$, determinar una base y dimensión del subespacio que dichos vectores generan.

Resolvamos cada ítem:

(a) Hallar los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

Para que el conjunto $\{(1,k,k);(2,k,2k);(k,3k,-k)\}$ sea base de $\mathbb{R}^3$, como son tres vectores, alcanza con pedirles que sean L.I..

Entonces escribamos al vector nulo de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores del conjunto.

$(0,0,0)=\lambda_1.(1,k,k)+\lambda_2.(2,k,2k)+\lambda_3.(k,3k,-k)$

La matriz ampliada del sistema de ecuaciones es:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ k & k & 3k & 0 \\ k & 2k & -k & 0 \end{array}\right)$ y necesitamos que el sistema sea S.C.D., entonces el determinante de la matriz asociada debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & k & 3k \\ k & 2k & -k \end{vmatrix} \neq 0$$

$$-k^2+6k^2+2k^3-k^3-6k^2-(-2k^2)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad k^2+k^3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad k^2(1+k)\neq 0$$

$$\Rightarrow\quad k\neq 0 \quad\wedge\quad 1+k\neq 0 \quad\Rightarrow\quad k\neq 0 \quad\wedge\quad k\neq -1$$

Por lo tanto, el conjunto $\{(1,k,k);(2,k,2k);(k,3k,-k)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ para todo $k\in\mathbb{R}-\{0;-1\}$

(b) Para los valores de k para los que no se forma una base de $\mathbb{R}^3$, determinar una base y dimensión del subespacio que dichos vectores generan.
De acuerdo a lo calculado en el ítem **(a)**, el conjunto
$\{(1,k,k);(2,k,2k);(k,3k,-k)\}$ no es base de $\mathbb{R}^3$ para $k=0 \quad \vee \quad k=-1$
Analicemos cada caso:

- Para $k=0$, el conjunto sería $\{(1,0,0);(2,0,0);(0,0,0)\}$
  Como los dos primeros vectores son múltiplos y el tercer oes el vector nulo, entonces, una base del subespacio que ellos generan es $B_{\mathbb{S}}=\{(1,0,0)\}$ y $Dim(\mathbb{S})=1$
- Para $k=-1$, el conjunto sería $\{(1,-1,-1);(2,-1,-2);(-1,-3,1)\}$
  Ya sabemos que los vectores son L.D. y ninguno de ellos es múltiplo de otro, así que alguno de ellos es combinación lineal de los demás, $Dim(\mathbb{S}')=2$.
  Una base de $\mathbb{S}'$ estaría formada por dos vectores del conjunto que sean L.I., por ejemplo, $B_{\mathbb{S}'}=\{(1,-1,-1);(2,-1,-2)\}$ (cualquiera de los otros dos pares posibles de vectores sirven para determinar la base de $\mathbb{S}'$).

7) Dado el conjunto $\{(1,k,2);(5,1,6);(k+2,1,2k)\}$

a) Hallar los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el conjunto no sea base de $\mathbb{R}^3$.
b) Para cada valor de $k\in\mathbb{R}$ hallado, determinar base y dimensión el subespacio que generan.

Resolvamos cada ítem:

(a) Hallar los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el conjunto no sea base de $\mathbb{R}^3$.
Para que el conjunto $\{(1,k,2);(5,1,6);(k+2,1,2k)\}$ no sea base de $\mathbb{R}^3$, como son tres vectores, debemos pedirles que sean L.D..
Entonces escribamos al vector nulo de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores del conjunto.
$(0,0,0)=\lambda_1.(1,k,2)+\lambda_2.(5,1,6)+\lambda_3.(k+2,1,2k)$
La matriz ampliada del sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & k+2 & 0 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2k & 0 \end{array}\right)$$

y necesitamos que el sistema sea S.C.I., entonces el determinante de la matriz asociada debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & k+2 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2k \end{vmatrix}=0$$

$2k+10+6k(k+2)-2(k+2)-5k.2k-6=0 \quad \Rightarrow$

$2k+10+6k^2+12k-2k-4-10k^2-6=0 \quad \Rightarrow$

$-4k^2+12k=0 \quad \Rightarrow \quad k(-4k+12)=0 \quad \Rightarrow \quad k=0 \quad \wedge \quad -4k+12=0$

$\Rightarrow \quad k=0 \quad \vee \quad k=3$

(b) Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ hallado, determinar base y dimensión el subespacio que generan.
De acuerdo a lo calculado en el ítem **(a)**, el conjunto
$\{(1,k,2);(5,1,6);(k+2,1,2k)\}$ no es base de $\mathbb{R}^3$ para $k=0 \quad \vee \quad k=3$
Analicemos cada caso:

- Para $k=0$, el conjunto sería $\{(1,0,2);(5,1,6);(2,1,0)\}$
  Ya sabemos que los vectores son L.D. y ninguno de ellos es múltiplo de otro, así que alguno de ellos es combinación lineal de los demás, $Dim(\mathbb{S})=2$.
  Una base de $\mathbb{S}$ estaría formada por dos vectores del conjunto que sean L.I., por ejemplo, $B_{\mathbb{S}}=\{(1,0,2);(2,1,0)\}$ (cualquiera de los otros dos pares posibles de vectores sirven para determinar la base de $\mathbb{S}'$)
- Para $k=3$, el conjunto sería $\{(1,3,2);(5,1,6);(5,1,6)\}$
  Ya sabemos que los vectores son L.D., pero además, los últimos dos vectores son iguales, y los dos primeros no son múltiplos, entonces $Dim(\mathbb{S}')=2$.
  Una base de $\mathbb{S}'$ estaría formada por los dos primeros vectores del conjunto, que son L.I., $B_{\mathbb{S}'}=\{(1,3,2);(5,1,6)\}$

Aplicaciones:

En la Unidad Nº 1, hemos visto el producto escalar entre dos vectores, repasémoslo:

Producto escalar o producto interno:

Sean $v=(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)$ y $w=(y_1;y_2;y_3;\cdots;y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se denomina producto escalar o producto interno entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al escalar que se obtiene de la siguiente manera:

$$v \bullet w = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3 + \cdots + x_n.y_n$$

Ejemplos:

1) $\left.\begin{array}{l} v=(2;2;-3;5) \\ w=(4;-3;1;1) \end{array}\right\} \Rightarrow v.w = 2.4+2.(-3)+(-3).1+5.1 = 8-6-3+5 = 4$

2) $\left.\begin{array}{l} v=(-4;0;5) \\ w=(1;-2;6) \end{array}\right\} \Rightarrow v.w = (-4).1+0.(-2)+5.(-6) = -4+0-30 = -34$

3) $\left.\begin{array}{l} v=(-2;-3;3;2;0) \\ w=(-4;-2;-8;5;7) \end{array}\right\} \Rightarrow v.w = (-2).(-4)+(-3).(-2)+3.(-8)+2.5+0.7 = 8+6-24+10+0 = 0$

4) Sea $p=(20;12;15)$ es vector que representa los precios de tres bienes: lápiz, goma y regla que Mauro compró en la librería antes de entrar a un examen, y sea $c=(2;2;1)$ el vector que representa las cantidades de cada uno de los artículos comprados, respectivamente. El producto escalar $p \bullet c = 20.2+12.2+15.1 = 40+24+15 = 79$ representa la cantidad abonada por Mauro en la librería.

Ecuación presupuestaria:

Uno de los modelos más utilizados para explicar el funcionamiento de la demanda es el de la utilidad marginal.

El consumidor suele tener muchos bienes o servicios entre los cuales puede elegir, pero un monto fijo de dinero que puede gastar. La ecuación presupuestaria representa las combinaciones de bienes o servicios que son alcanzables para el consumidor, según su renta y los precios de los bienes.

Las restricciones que tiene el consumidor a la hora de elegir el conjunto de bienes o servicios, son su renta y los precios de los bienes o servicios. Cuanto mayor sea el precio de un bien, menos puede consumir de dicho bien.

Si consideramos que los bienes o servicios elegidos por un consumidor son $X_1, X_2, \cdots, X_n$, cuyos precios son, respectivamente $p_1, p_2, \cdots, p_n$ y las cantidades de cada uno de ellos son $x_1, x_2, \cdots, x_n$ respectivamente, y llamamos I al ingreso del consumidor, podemos definir al vector de precios $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ y al vector de cantidades $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, entonces el producto escalar de los vectores p y X da por resultado el costo de consumir todos los bienes, que es menor o igual al ingreso o renta I del consumidor. A esta relación se la denomina *restricción presupuestaria*:

$$p \bullet X \leq I$$

Cuando el consumidor utiliza toda la renta para el consumo de los bienes o servicios, nos queda una ecuación que se conoce como *ecuación presupuestaria o ecuación de balance* del consumidor:

$$p \bullet X = I \longrightarrow \textit{Ecuación Presupuestaria o Ecuación de Balance}$$

Desarrollando el producto escalar, nos queda que la ecuación presupuestaria es:

$$p_1.x_1 + p_2.x_2 + \cdots + p_n.x_n = I$$

Se supone que no existe posibilidad de endeudamiento.

Si consideramos que el consumidor destina todo su ingreso al bien X_i, es decir, no consume ninguno de los otros bienes, entonces la cantidad que consumiría de este bien es $x_i = \dfrac{I}{p_i}$.

Entonces $x_i = \dfrac{I}{p_i}$ representa la cantidad máxima que se puede adquirir del bien o servicio X_i, sin consumir ninguno de los otros bienes o servicios.

Por otro lado, supongamos que el consumidor se encuentra en un punto de la ecuación presupuestaria y desea aumentar su consumo del bien X_i en Δx_i. Para poder seguir cumpliendo con la restricción de su ingreso deberá reducir el consumo de algún bien X_j en Δx_j

En este caso, el coeficiente $\dfrac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = -\dfrac{p_i}{p_j}$ mide el *costo de oportunidad* del consumidor. Si este quiere consumir más bien X_i, debe enfrentar el costo de renunciar a un mayor consumo del bien X_j. Por eso este coeficiente tiene signo negativo, ya que en el equilibrio, si el consumidor quiere aumentar el consumo de un bien, debe disminuir el consumo del otro bien.

- Supongamos que tenemos dos bienes X_1 y X_2, el vector de precios es $p = (p_1, p_2)$ y el vector de cantidades $X = (x_1, x_2)$, entonces la *restricción presupuestaria* es:

$p_1.x_1 + p_2.x_2 \leq I$

Cuando el consumidor utiliza toda la renta para el consumo de ambos bienes, nos queda la *ecuación presupuestaria o ecuación de balance o recta de balance* del consumidor:

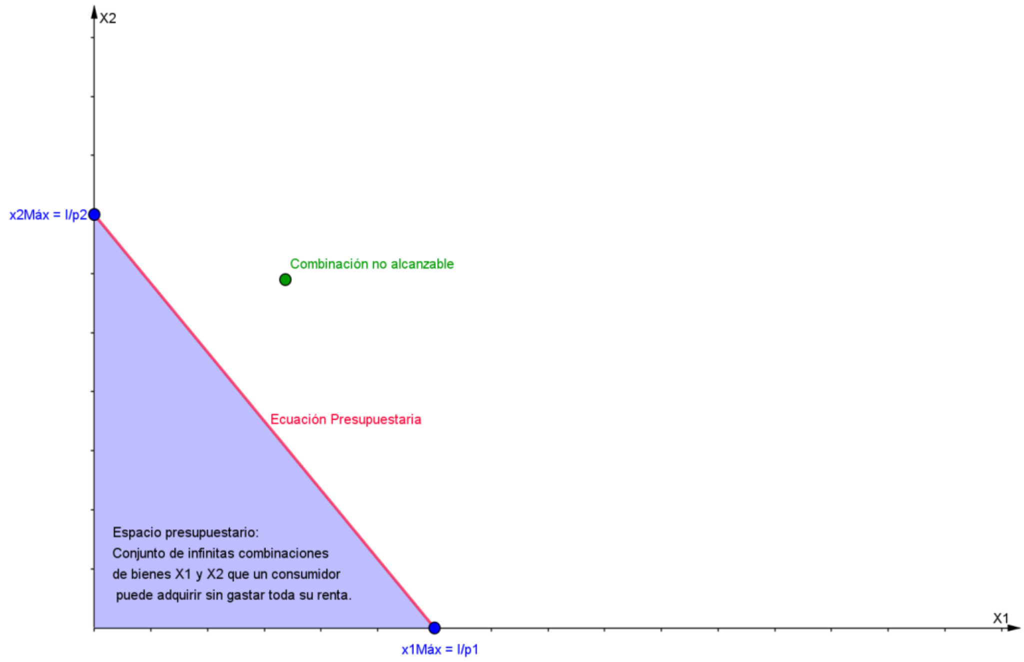
$p_1.x_1 + p_2.x_2 = I$ ⟶ *Ecuación Presupuestaria o Ecuación de Balance o Recta Balance*

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_1, es decir, no consume del bien X_2, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{1MÁX} = \frac{I}{p_1}$.

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_2, es decir, no consume del bien X_1, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{2MÁX} = \frac{I}{p_2}$.

Si el consumidor se encuentra en un punto de la ecuación presupuestaria y desea aumentar su consumo del bien X_1 en Δx_1 y quiere seguir cumpliendo con la restricción de su ingreso, deberá reducir el consumo del bien X_2 en Δx_2

El coeficiente que mide el *costo de oportunidad* del consumidor es $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$, en este caso es la pendiente de la recta balance, que representa la ecuación presupuestaria para estos dos bienes.



❖ Supongamos que tenemos tres bienes X_1, X_2 y X_3, el vector de precios es $p = (p_1, p_2, p_3)$ y el vector de cantidades $X = (x_1, x_2, x_3)$, entonces la *restricción presupuestaria* es:

$p_1.x_1 + p_2.x_2 + p_3x_3 \leq I$

Cuando el consumidor utiliza toda la renta para el consumo de ambos bienes, nos queda la *ecuación presupuestaria o ecuación de balance o recta de balance* del consumidor:

$$p_1.x_1 + p_2.x_2 + p_3.x_3 = I \longrightarrow$$ *Ecuación Presupuestaria o Ecuación de Balance o Plano Balance*

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_1, es decir, no consume de los bienes X_2 y X_3 entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{1MÁX} = \dfrac{I}{p_1}$.

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_2, es decir, no consume de los bienes X_1 y X_3, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{2MÁX} = \dfrac{I}{p_2}$.

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_3, es decir, no consume de los bienes X_1 y X_2, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{3MÁX} = \dfrac{I}{p_3}$.

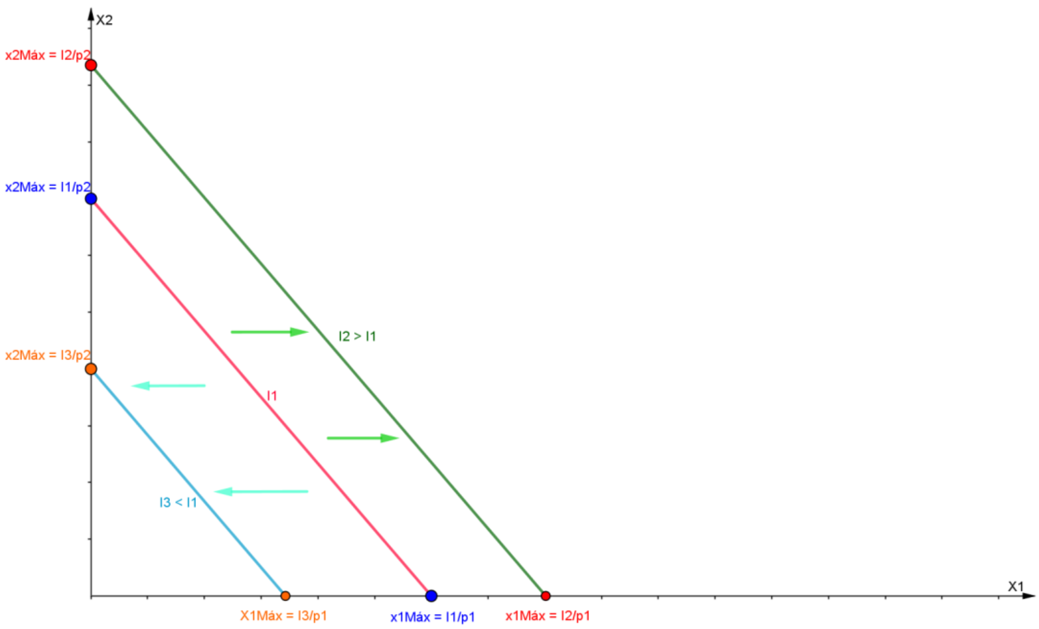
Cambios en la restricción presupuestaria:

Una cosa importante es analizar qué ocurriría si varían las restricciones del consumidor, es decir, si aumenta o disminuye la renta del consumidor o cambian los precios de los bienes.

Cambios en el ingreso

Cuando el ingreso de un consumidor varía, ceteris paribus los precios de los bienes y servicios, las cantidades de los bienes que éste puede adquirir también lo harán:

- Un aumento en el ingreso viene acompañado de un aumento en las posibilidades de consumo. La recta de balance se desplazará a la derecha.
- Una caída en el ingreso viene acompañando de una reducción en sus posibilidades de consumo. La recta de balance se desplazará a la izquierda.



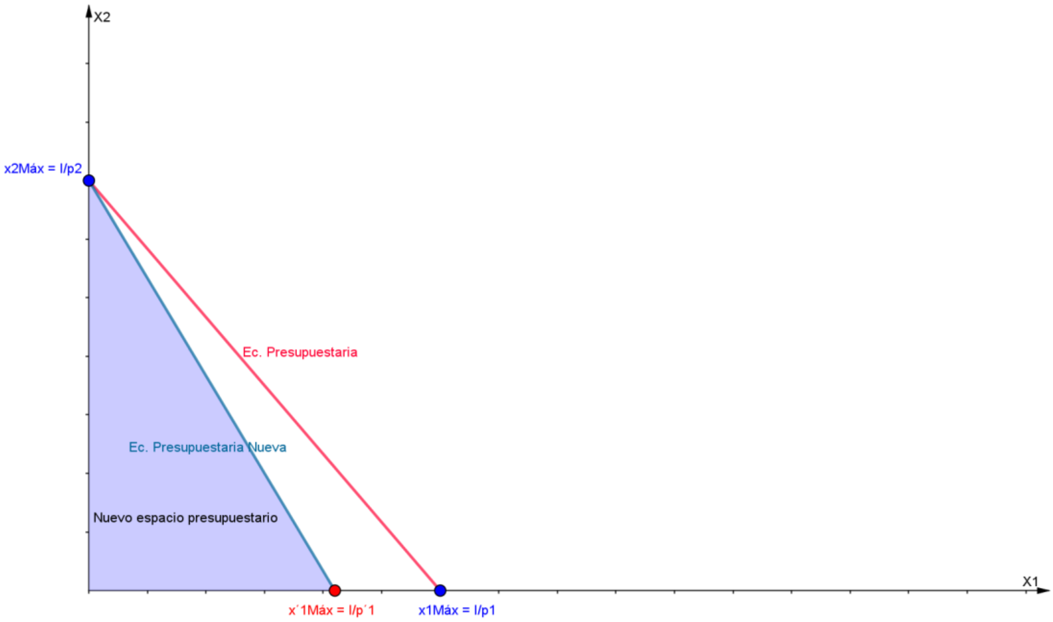
En ese caso, el costo de oportunidad es el mismo.

Cambio en un precio

Analizar los cambios en precios, es diferente que el de cambios en el ingreso, ya que al cambiar algún precio, el área de elección del consumidor se modificará a través de un cambio en la pendiente de la restricción presupuestaria, es decir, mediante un cambio en el costo de oportunidad entre el consumo de ambos bienes.
Supongamos un aumento en el precio del bien X_1, ceteris paribus el precio del bien X_2 y el ingreso. El área de elección del consumidor disminuye en función del bien cuyo precio aumenta.
Tenemos los dos bienes X_1 y X_2, el vector nuevo de precios es $p=\left(p_1', p_2\right)$ y el vector de cantidades $X=\left(x_1', x_2\right)$, entonces la nueva *ecuación presupuestaria* es:

$$p_1'.x_1' + p_2.x_2 = I$$

Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_1, es decir, no consume del bien X_2, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x'_{1MÁX} = \dfrac{I}{p_1'}$ con $x'_{1MÁX} < x_{1MÁX}$ pues $p_1' > p_1$.
Si el consumidor destina todo su ingreso al bien X_2, es decir, no consume del bien X_1, entonces la cantidad máxima que consumiría de este bien es $x_{2MÁX} = \dfrac{I}{p_2}$, igual que si no hubiese aumentado X_1.



En consecuencia, ante el aumento en el precio de un bien, ceteris paribus lo demás, el poder adquisitivo del consumidor disminuirá y en consecuencia también lo harán sus posibilidades de consumo.
Si por el contrario disminuye el precio de un bien, ceteris paribus lo demás, el poder adquisitivo del consumidor se incrementará y en consecuencia también lo harán sus posibilidades de consumo.

Ejemplos:

1) El encargado de las compras de un restaurante dispone de *\$ 900* diarios para comprar la lechuga, los tomates y las zanahorias para las ensaladas. El kilo de lechuga cuesta *\$ 25*, el kilo de tomates cuesta *\$ 30* y el kilo de zanahorias cuesta *\$ 10*.

a) Plantear la ecuación presupuestaria diaria.

b) Determinar la cantidad de zanahoria que puede comprar con dicho presupuesto, suponiendo que un día decide no comprar lechuga ni tomates.

c) Si compra 12 kilos de lechuga y 4 kilos de tomates, ¿cuántos kilos de zanahorias debe comprar para agotar el presupuesto?

d) Si compra 12 kilos de lechuga, ¿cuál es la ecuación presupuestaria correspondiente a las posibilidades de consumo de tomates y zanahorias? Graficarla.

Resolución:

Como el presupuesto del que dispone el encargado de este restaurante es de *\$ 900*, entonces $I = 900$

Como el kilo de lechuga cuesta *\$ 25*, entonces $p_l = 25$ y x_1 es la cantidad de kilos de lechuga.

Como el kilo de tomates cuesta *\$ 30*, entonces $p_t = 30$ y x_2 es la cantidad de kilos de tomates.

Como el kilo de zanahorias cuesta *\$ 10*, entonces $p_z = 10$ y x_3 es la cantidad de kilos de zanahorias.

Por lo tanto, el vector de precios es $p = (25, 30, 10)$ y el vector de cantidades es $X = (x_1, x_2, x_3)$

(a) Plantear la ecuación presupuestaria diaria.

$$(25, 30, 10) \bullet (x_1, x_2, x_3) = 900$$

$$25x_1 + 30x_2 + 10x_3 = 900$$

(b) Determinar la cantidad de zanahoria que puede comprar con dicho presupuesto, suponiendo que un día decide no comprar lechuga ni tomate.

Si no compra lechuga ni tampoco tomate, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, por lo tanto,

$$25.0 + 30.0 + 10x_3 = 900$$

$10x_3 = 900$ de donde obtenemos: $x_3 = 90$

Si no compra lechuga ni tomates, ese día puede adquirir 90 kilogramos de zanahorias.

(c) Si compra 12 kilos de lechuga y 4 kilos de tomates, ¿cuántos kilos de zanahorias debe comprar para agotar el presupuesto?

Si compra 12 kilos de lechuga, $x_1 = 12$ y si compra 4 kilos de tomates, $x_2 = 4$ entonces:

$$25.12 + 30.4 + 10x_3 = 900$$

$$300 + 120 + 10x_3 = 900$$

$$420 + 10x_3 = 900$$

$$10x_3 = 900 - 420$$

$$10x_3 = 480$$

$$x_3 = 48$$

Para agotar el presupuesto debe comprar 48 kilos de zanahorias.

(d) Si compra 12 kilos de lechuga, ¿cuál es la ecuación presupuestaria correspondiente a las posibilidades de consumo de tomates y zanahorias? Graficarla.

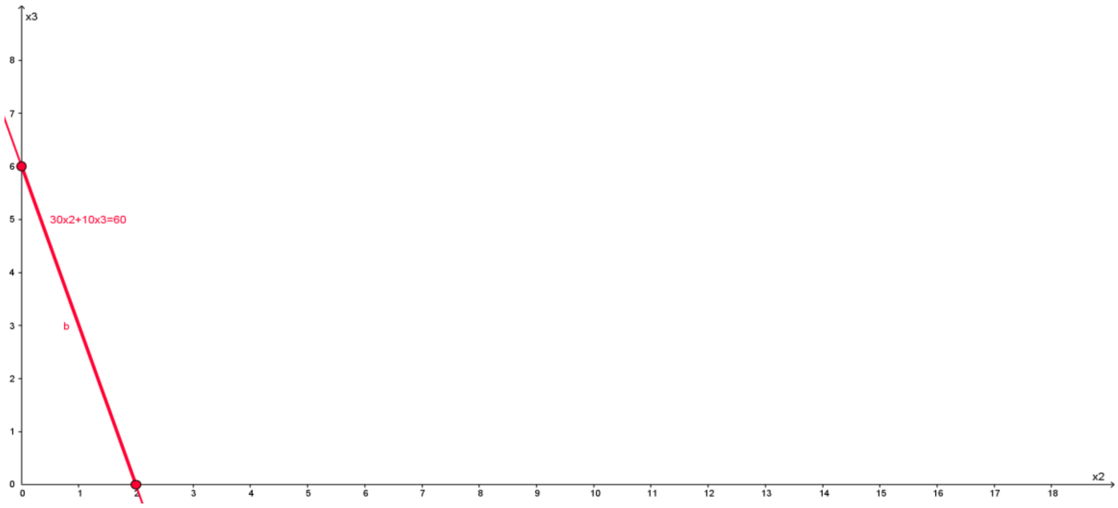
Si compra 12 kilos de lechuga, $x_1 = 12$ entonces:

$$25.12 + 30.x_2 + 10x_3 = 900$$

$$300 + 30.x_2 + 10x_3 = 900$$

$$30.x_2 + 10x_3 = 900 - 300$$

$$30.x_2 + 10x_3 = 600 \longrightarrow$$ Ecuación presupuestaria para consumo de tomates y zanahorias.



2) Se dispone de un presupuesto de *$ 960* para la compra de cuadernos y lapiceras. Cada cuaderno tiene un precio de *$ 32* y con este presupuesto, si se compran sólo lapiceras, se pueden comprar 60 lapiceras.

a) ¿Cuál es el vector de precios?

b) Plantear la ecuación presupuestaria.

c) Si se compran 32 lapiceras de colores (todas tienen el mismo precio), ¿cuántos cuadernos se deben comprar para agotar el presupuesto?

d) ¿Cuál es la cantidad máxima de cuadernos que se pueden comprar?

e) Graficar la recta que contiene todas las posibilidades de consumo de cuadernos y biromes para este presupuesto.

f) Si las lapiceras sufren un incremento del 20%, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria? Graficarla

Resolución:

Como el presupuesto del que se dispone es de $960, entonces $I = 960$

Como el precio de cada cuaderno es de *$ 32*, entonces $p_c = 32$ y x_1 es la cantidad de cuadernos.

El precio de cada lapicera es p_l y $x_2 = 60$ es la cantidad máxima de lapiceras que se pueden adquirir.

Por lo tanto, el vector de precios es $p = (32, p_l)$ y el vector de cantidades es $X = (x_1, x_2)$

(a) ¿Cuál es el vector de precios?

Nosotros sabemos que la ecuación presupuestaria es

$$(32, p_l) \bullet (x_1, x_2) = 960$$

$$32.x_1 + p_l.x_2 = 960$$

Como 60 es la cantidad máxima de lapiceras que se pueden adquirir, entonces si $x_2 = 60$, $x_1 = 0$. Reemplazando en la ecuación presupuestaria queda:

$32.0 + p_l.60 = 960$

$p_l.60 = 960 \quad \Rightarrow \quad p_l = \dfrac{960}{60} = 16$

El precio de cada lapicera es *$ 16*

El vector de precios es $p = (32,16)$

(b) Plantear la ecuación presupuestaria.

Ya teníamos planteada la ecuación presupuestaria, faltaba completarla con el precio de las lapiceras que obtuvimos en el ítem anterior:

$32.x_1 + p_l.x_2 = 960$

$32.x_1 + 16.x_2 = 960$

(c) Si se compran 32 lapiceras de colores (todas tienen el mismo precio), ¿cuántos cuadernos se deben comprar para agotar el presupuesto?

Si se compran 32 lapiceras de colores, entonces $x_2 = 32$ y precisamos saber cuánto vale x_1, entonces:

$32.x_1 + 16.32 = 960$

$32.x_1 + 512 = 960$

$32.x_1 = 960 - 512$

$32.x_1 = 448 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{448}{32} = 14$

Si se compran 32 lapiceras, se pueden comprar hasta 14 cuadernos.

(d) ¿Cuál es la cantidad máxima de cuadernos que se pueden comprar?

Pasa saber la cantidad máxima de cuadernos que se puede comprar, debemos tener en cuenta que no se compran lapiceras, entonces $x_2 = 0$; reemplazando, tenemos:

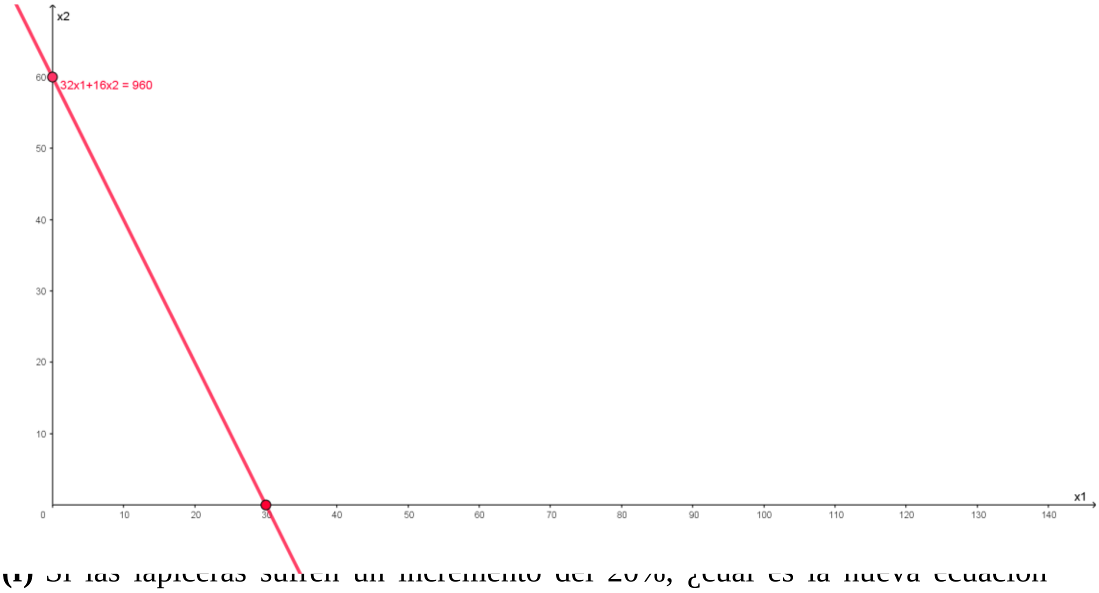
$32.x_1 + 16.0 = 960$

$32.x_1 + 16.0 = 960$

$32.x_1 = 960 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{960}{32} = 30$

La cantidad máxima de cuadernos que se pueden comprar es 30 unidades.

(e) Graficar la recta que contiene todas las posibilidades de consumo de cuadernos y biromes para este presupuesto.



(f) Si las lapiceras sufren un incremento del 20%, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria? Graficarla.

En el ítem (a) habíamos calculado que el precio de las lapiceras es de $16. Si aumentan un 20%, para un mismo presupuesto vamos a poder comprar una cantidad máxima menor que antes de lapiceras.

Precio anterior de cada lapicera: $p_l = 16$

Nuevo precio de cada lapicera: $p_l' = 16.1,20 = 19,20$

Entonces el nuevo vector de precios es: $p' = (32;19,20)$

Y por lo tanto, la nueva ecuación presupuestaria es: $32.x_1 + 19,20.x_2 = 960$

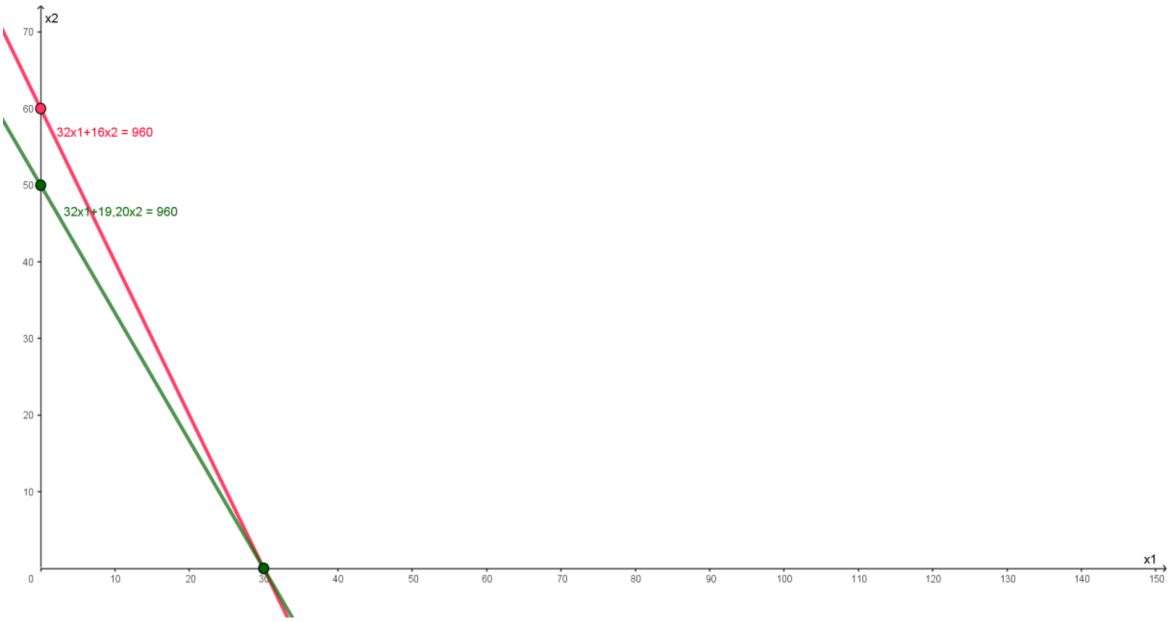
Como los cuadernos mantienen el precio, la cantidad máxima de cuadernos que se puede comprar es la misma, 30, pero van a ser menor la cantidad de lapiceras:

Si $x_1 = 0$ entonces:

$$32.0 + 19,20.x_2 = 960$$

$$19,20.x_2 = 960 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{960}{19,20} = 50$$

En "el mismo gráfico" que antes, para notar la diferencia:



3) La ecuación presupuestaria de un consumidor que dispone de *$ 18000* para la compra de tres productos A, B y C es: $ax_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$. La máxima cantidad de unidades del producto A que el consumidor puede adquirir es *45*. Un posible vector de cantidades es $X = (20, 22, 26)$

a) ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto B?
b) Determinar los valores de a y b.
c) ¿Cuál es el vector de precios?
d) ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto C?
e) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C? Graficarla.
f) Este consumidor tiene un ascenso en su trabajo, por el cual ahora dispone de un 30% más para la adquisición de estos tres bienes. ¿Cuál es la nueva ecuación presupuestaria?
g) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C? Graficarla.
h) En este último caso, ¿en qué porcentaje aumentó el presupuesto de para los bienes B y C?
i) Si en un período hubo una inflación del 30% que afectó a los tres bienes, pero el mantiene él presupuesto de su ascenso, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria?
j) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C, luego del aumento? Graficarla y sacar conclusiones.

Resolución:
La ecuación presupuestaria de este consumidor es: $ax_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$.
Cantidad máxima de unidades del producto A: $x_1 = 45$
Un vector de cantidades es $X = (20, 22, 26)$

(a) ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto B?
La máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto B es cuando se no se adquieren unidades de los productos A y C, entonces $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$.
Reemplazando:

$$ax_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$$
$$a.0 + 100x_2 + b.0 = 18000$$
$$100x_2 = 18000 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{18000}{100} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 180$$

La máxima cantidad que puede comprar del producto B es 180 unidades.

(b) Determinar los valores de a y b.
Para determinar los valores de a y b, vamos a utilizar los datos:
Cantidad máxima de unidades del producto A se puede adquirir asumiendo que no se compran productos B y C, entonces: $x_1 = 45$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.
Reemplazando:

$$ax_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$$
$$a.45 + 100.0 + b.0 = 18000$$

$a.45 = 18000 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{18000}{45} \quad \Rightarrow \quad a = 400$

Por lo tanto, la ecuación presupuestaria estaría quedando así:

$400x_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$

Un vector de cantidades es $X = (20, 22, 26)$, entonces: $x_1 = 20$, $x_2 = 22$ y $x_3 = 26$. Reemplazando:

$400x_1 + 100x_2 + bx_3 = 18000$

$400.20 + 100.22 + b.26 = 18000$

$8000 + 2200 + b.26 = 18000$

$10200 + b.26 = 18000$

$b.26 = 18000 - 10200$

$b.26 = 7800 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{7800}{26} \quad \Rightarrow \quad b = 300$

La ecuación presupuestaria es: $400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$

(c) ¿Cuál es el vector de precios?

Dado que la ecuación presupuestaria es $400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$, entonces el vector de precios es $p = (400, 100, 300)$

(d) ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto C?

La máxima cantidad de unidades que puede comprar del producto C es cuando se no se adquieren unidades de los productos A y B, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Reemplazando:

$400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$

$400.0 + 100.0 + 300x_3 = 18000$

$300x_3 = 18000 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{18000}{300} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 60$

La máxima cantidad que puede comprar del producto C es 60 unidades.

(e) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C? Graficarla.

Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, entonces $x_1 = 30$. Reemplazando:

$400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$

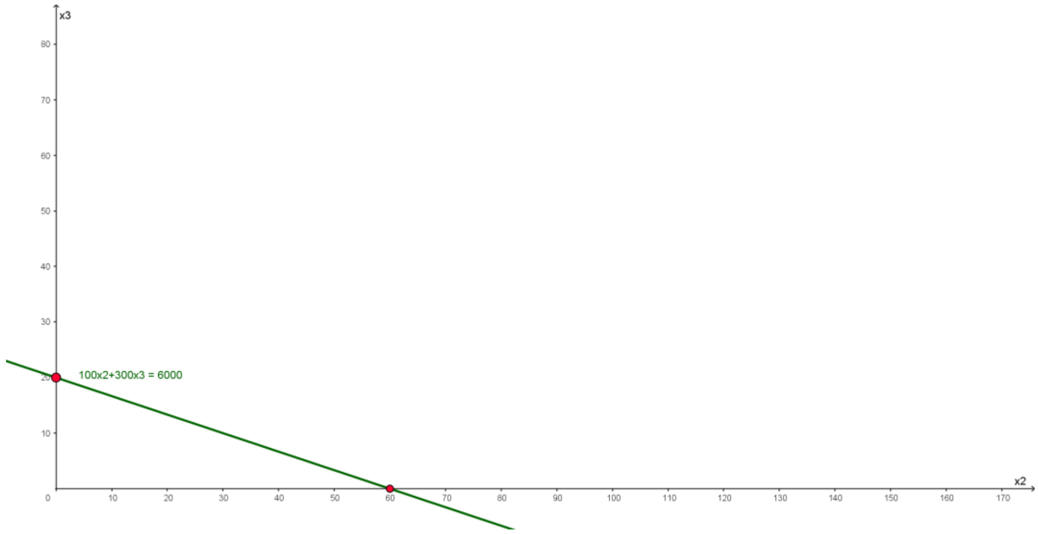
$400.30 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$

$12000 + 100x_2 + 300x_3 = 18000$

$100x_2 + 300x_3 = 18000 - 12000$

$100x_2 + 300x_3 = 6000$

Ecuación presupuestaria de los bienes B y C: $100x_2 + 300x_3 = 6000$



(f) Este consumidor tiene un ascenso en su trabajo, por el cual ahora dispone de un 30% más para la adquisición de estos tres bienes. ¿Cuál es la nueva ecuación presupuestaria?

El presupuesto anterior del consumidor: $I = \$18000$

El nuevo presupuesto del consumidor será un 30% mayor: $I = \$18000.1,30 = 23400$

Entonces, la nueva ecuación presupuestaria es: $400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 23400$

(g) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C? Graficarla

$400x_1 + 100x_2 + 300x_3 = 23400$

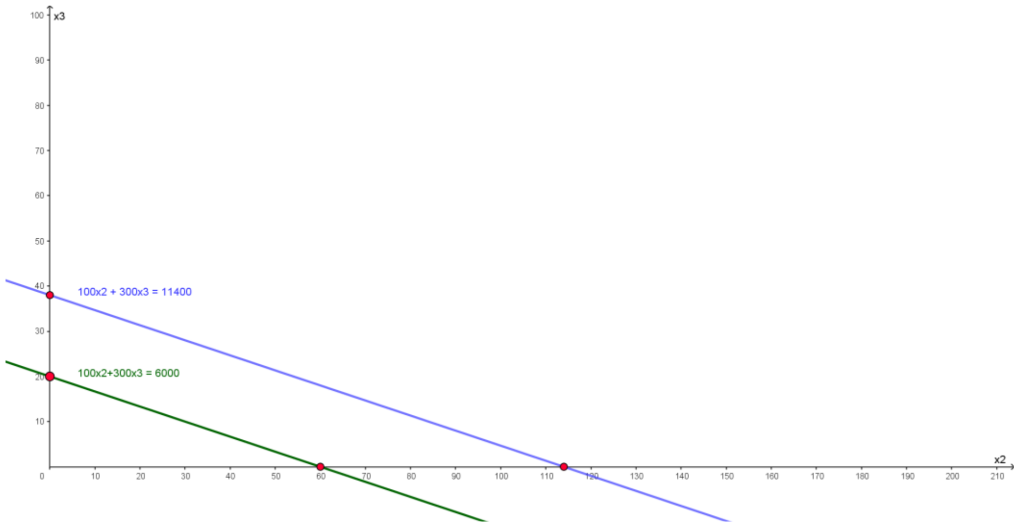
$400.30 + 100x_2 + 300x_3 = 23400$

$12000 + 100x_2 + 300x_3 = 23400$

$100x_2 + 300x_3 = 23400 - 12000$

$100x_2 + 300x_3 = 11400$

Ecuación presupuestaria de los bienes B y C: $100x_2 + 300x_3 = 11400$



(h) En este último caso, ¿en qué porcentaje aumentó el presupuesto de para los bienes B y C?

El presupuesto primero para los bienes B y C era de *$ 6000* y el actual es de *$ 11400*, entonces, para saber en qué porcentaje aumentó, buscamos el coeficiente que los relaciona:

$$\frac{11400}{6000} = \frac{19}{10} = 1,90$$

El nuevo presupuesto aumentó en un 90%

(i) Si en un período hubo una inflación del 30% que afectó a los tres bienes, pero él mantiene el presupuesto de su ascenso, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria?

Si en el período hubo una inflación del 30%, el nuevo vector de precios será:

$$p' = 1,30.p = 1,30.(400,100,300) = (520,130,390)$$

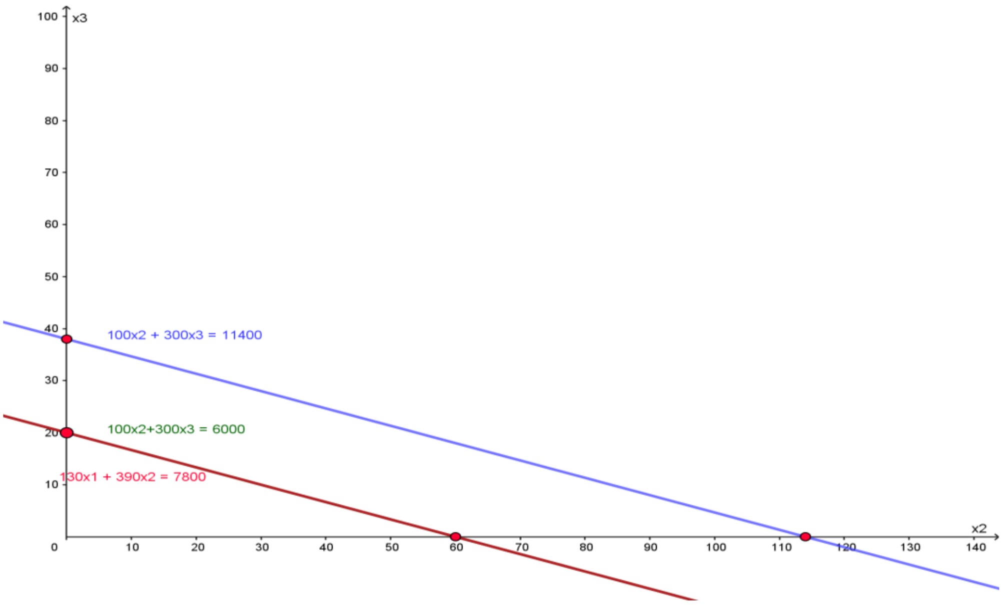
Entonces, luego de la inflación, la ecuación presupuestaria será:

$$520x_1 + 130x_2 + 390x_3 = 23400$$

(j) Si el consumidor adquiere 30 unidades del bien A, ¿cuál es la nueva ecuación presupuestaria que muestra las posibles combinaciones que se pueden consumir de los bienes B y C, luego del aumento? Graficarla y sacar conclusiones.

$$520x_1 + 130x_2 + 390x_3 = 23400$$
$$520.30 + 130x_2 + 390x_3 = 23400$$
$$15600 + 130x_2 + 390x_3 = 23400$$
$$130x_2 + 390x_3 = 23400 - 15600$$
$$130x_2 + 390x_3 = 7800$$

Ecuación presupuestaria de los bienes B y C: $130x_2 + 390x_3 = 7800$



La nueva ecuación presupuestaria, luego del cálculo de inflación para los bienes B y C, es equivalente a la ecuación presupuestaria antes de la inflación y antes del ascenso, ya que el porcentaje de inflación y el aumento del presupuesto por el ascenso, es del 30%, el mismo en ambos casos. Por lo tanto, las posibilidades de consumo son las mismas que en un principio. Financieramente, este consumidor, luego de la inflación, se encuentra en las mismas condiciones que las que tenía antes del ascenso.