CONSIDERACIONES GENERALES ACERCA DE LA LOGICA LINEAL

Maria da Paz Nunes de Medeiros
Universidade Federal de Rio Grande do Norte

Resumen

En este trabajo se hacen consideraciones generales acerca de la lógica lineal, tomando especialmente en cuenta sus motivaciones y su formalización. En primer lugar, se explica la necesidad de expandir el conjunto usual de conectivas lógicas en la lógica lineal. Siguiendo a Girard (1987), se presenta una formalización para la lógica lineal como un cálculo de secuentes y se esboza el teorema de eliminación de corte para este sistema. Finalmente, se lleva a cabo un análisis crítico de la traducción de la lógica intuicionista en la lógica lineal debida a Girard.

Abstract

In this paper, general considerations about linear logic, with especial attention to its motivations and formalization, are made. Firstly, the need to expand the usual set of logic connectives in the linear logic is explained. Following Girard (1987), a sequent calculus formalization for linear logic is presented and a cut-elimination theorem for such system is sketched. Finally, a critical analysis of the translation from intuitionistic logic into linear logic given by Girard is carried out.

Introducción

La lógica lineal fue inicialmente desarrollada por Girard (1987) y se puede comprender mejor a partir de diferentes aspectos. Desde el punto de vista lógico, la podemos ver como un refinamiento de determinadas operaciones lógicas cuando sea relevante la cantidad de veces que una hipótesis es usada en un razonamineto. Desde el punto de vista computacional, la lógica lineal permite un mejor tratamiento de ciertos procesos computacionales, como, por ejemplo, la localización de la memoria, *side effects*, además de tener aplicaciones promisorias en paralelismo (Girard, 1989, p. 150). Además, como observa Troelstra (1992, p.1), la lógica lineal es vista como un ejemplo de una lógica *resource-conscious*, donde las fórmulas representan tipos de recursos, y los recursos no pueden ser usados libremente.

Las lógicas subestructurales se caracterizan por rechazar en sus formulaciones en el cálculo de secuentes una o más reglas estructurales. De esta forma, la lógica lineal es considerada una lógica subestructural en la medida en que no permite el libre uso de las reglas estructurales de atenuación y contracción. Entretanto, a diferencia de lo que ocurre con otras lógicas subestructurales, en la lógica lineal las reglas estructurales son rescatadas controladamente a través de ciertos operadores como lo describiremos a continuación.

La lógica lineal tiene dos operadores que merecen destacarse. Son llamados operadores lineales o exponenciales y representados por los símbolos "**!**" y "**?**". El papel de estos operadores es introducir de forma controlada las reglas estructurales de atenuación y contracción. Más específicamente, la contracción y la atenuación a la izquierda de un secuente, en la lógica lineal, son permitidas solamente para fórmulas en las que está antepuesto el operador **!**, en cuanto al uso de esas reglas para la introducción a la derecha sólo es permitido para fórmulas en las que está antepuesto **?**. En la bibliografía, el operador **!** aparece con los nombre de *storage*, *of course*, *plink*, entre otros. El operador **?** es mencionado como *costorage* o *why not* [1].

Girard, (1987) presenta dos semánticas para la lógica lineal. La semántica de fases, que él considera una semántica tarskiana, y la semántica de coherencia, que también es conocida como espacios de coherencia y es vista como una semántica denotacional. Demostró que la lógica lineal es correcta y completa con respecto a la semántica de fases.

En la primera parte de este trabajo, explicaremos, a partir de un ejemplo que contiene sólo la conjunción, por qué en la lógica lineal es necesario expandir el conjunto usual con dos conectivas lógicas. Ese abordaje es relevante para una mejor comprensión de su formalización.

En la segunda sección, presentaremos un sistema de cálculo de secuentes para la lógica lineal, destacando las principales propiedades sintácticas de sus operadores lógicos y en la tercera sección, presentaremos un esbozo de la demostración de eliminación de corte para este sistema.

Con la presencia de los operadores exponenciales en la lógica lineal, en particular del operador *storage*, se hace posible interpretar la lógica intuicionista en la lógica lineal. Discutiremos este resultado con más detalles, en la cuarta sección, a partir de un análisis crítico de la demostración de la traducción de la lógica intuicionista a la lógica lineal presentada en Girard (1987), tomando como referencia los problemas señalados por Schellinx (1991) en esa demostración. Otras referencias sobre traducciones aplicadas a la lógica lineal estan en Pereira (1999) y en Medeiros y Pereira (2000).

Concluiremos con la discusión de las dificultades para desarrollar sistemas de deducción natural para la lógica lineal.

1. Expansión de las conectivas lógicas

Antes de presentar precisamente una formulación en el cálculo de secuentes para la lógica lineal clásica, explicaremos por qué, en tal sistema, es necesario expandir el conjunto usual de las conectivas lógicas.

Sabemos que en la formulación, en el cálculo de secuentes, de la lógica clásica usual, existen reglas distintas para introducir un mismo operador lógico. Para comprender mejor el problema, centraremos nuestra atención en el caso de la conjunción.

Vamos a analizar dos sistemas de la lógica clásica, en el cálculo de secuentes, cuyos símbolos primitivos son solamente la conjunción y la negación. Tales sistemas serán denominados $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$.

En estos sistemas, y en los otros casos, en lugar de considerar un secuente $\Gamma \quad \Delta$ como constituido por listas finitas de fórmulas, como originalmente lo hace Gentzen, consideraremos Γ y Δ como *multisets*. Esto significa que Γ y Δ son conjuntos de fórmulas que tienen múltiples ocurrencias de una misma fórmula. Está claro que, al optar por secuentes constituidos por *multisets*, la regla estructural de permutación se torna inocua.

Los sistemas $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ tienen los mismos axiomas y reglas estructurales. En cuanto a las reglas lógicas, difieren solamente en las reglas de introducción de la conjunción a la derecha y a la izquierda. Explicitaremos abajo solamente las reglas de introducción para la conjunción en cada sistema.
i) reglas de introducción de la conjunción del sistema $\mathbf{S_1}$:

L_1 $\quad \dfrac{\Gamma, A, B \quad \Delta}{\Gamma, A \quad B \quad \Delta}$ $\qquad$ R_1 $\quad \dfrac{\Gamma_1, \quad A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \quad B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad A \quad B, \Delta_1, \Delta_2}$

ii) reglas de introducción de la conjunción del sistema $\mathbf{S_2}$:

L_2 $\quad \dfrac{\Gamma, A, \quad \Delta}{\Gamma, A \quad B \quad \Delta}$ $\quad \dfrac{\Gamma, B, \quad \Delta}{\Gamma, A \quad B \quad \Delta}$ $\qquad$ R_2 $\quad \dfrac{\Gamma \quad A, \Delta \quad \Gamma \quad B, \Delta}{\Gamma \quad A \quad B, \Delta}$

Observamos que en el sistema $\mathbf{S_1}$, la introducción de la conjunción se da a partir de contextos diferentes, en cuanto al sistema $\mathbf{S_2}$ la introducción de la conjunción es sensible con respecto al contexto, i.e, sólo podemos introducirla a partir de contextos fragmentados.

No es difícil mostrar que los sistemas $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ son equivalentes. Para demostrar esta equivalencia, es suficiente mostrar el caso de la conjunción, ya que las demás reglas y axiomas son los mismos. Mostraremos a continuación que $\mathbf{S_1}$ se sigue de $\mathbf{S_2}$, explicitando solamente el caso de la regla R_1.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \quad A, \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad A, \Delta_1 \Delta_2} \qquad \dfrac{\Gamma_2, \quad B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad B, \Delta_1, \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad A, \; B, \Delta_1, \Delta_2}\; R2$$

En esta deducción, las dos barras indican aplicaciones sucesivas de la regla de atenuación. Esas aplicaciones son imprescindibles para que se puedan recuperar los componentes necesarios para la aplicación de la regla R_2.

La demostración de que el sistema $\mathbf{S_2}$ se sigue de $\mathbf{S_1}$ es presentada abajo. Igualmente sólo explicitaremos el caso de la regla R_2..

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \quad A, \Delta \qquad \Gamma \quad B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \quad A, \; B, \Delta, \Delta}\; R1}{\Gamma \quad A \; B, \Delta,}$$

Aquí, las dos barras indican sucesivas aplicaciones de la regla de contracción. En este caso, podemos claramente observar la necesidad del uso de la regla de contracción, pues caso contrario, no tendríamos cómo eliminar la multiplicidad de los *multisets* Γ y Δ generada por la aplicación de la regla R_1.

En la demostración de la equivalencia entre $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ resaltamos que es esencial el uso de las reglas de contracción y atenuación. Ya afirmamos anteriormente que la lógica lineal es clasificada como una lógica subestructural, exactamente porque en ella no está permitido el uso de estas reglas estructurales. Así, con la ausencia de estas reglas estructurales, las reglas de introducción de la conjunción de los sistemas $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ corresponden a dos operadores diferentes. Consecuentemente, si tenemos en consideración que las reglas de inferencia determinan el significado de las conectivas u operadores lógicos, es necesario que tengamos un símbolo especial para representar cada operador.

Siguiendo el ejemplo de la conjunción, en ausencia de las reglas de atenuación y contracción, las diferentes formas de introducir cada conectiva lógica usual corresponden a distintos operadores lineales. Las conectivas lógicas se dividen en dos grupos denominados aditivos y multiplicativos. Los operadores aditivos son aquellos que son sensibles con relación al contexto, en tanto que los operadores multiplicativos son libres del contexto (GIRARD, 1987). De esta forma, se hace necesario escoger símbolos diferentes para representar, dependiendo de la situación, cada conectiva lógica.

Para cada conectiva lógica usual indicaremos abajo los correspondientes símbolos multiplicativo y aditivo en este orden, que usaremos para representarlos.

	→		⊤	
Multiplicativo	_o		1	
Aditivo	ϒ	&	⊤	**0**

Algunos de estos símbolos reciben nombres especiales tales como: _o (implicación lineal), (tensor) y (par). El conjunto de los símbolos escogidos aquí para las conectivas lógicas y que serán usados en las secciones subsiguientes son los mismos presentados en Girard (1987).

2. Lógica lineal en el cálculo de secuentes

Presentaremos una formulación en el cálculo de secuentes para la lógica lineal clásica de primer orden, que será denominada CLL, y explicitaremos algumas de sus propiedades deductivas.

El lenguaje de CLL está constituido por las conectivas lógicas multiplicativas _o, , , **1** y ; por las conectivas aditivas ϒ, &, , ⊤ y **0**; por los operadores exponenciales **!** y **?** y por los cuantificadores y . Usaremos las letras latinas mayúsculas *A*, *B*, ..., con o sin subíndices, para denotar fórmulas, las latinas minúsculas x, y, z, ... con o sin subíndices, para denotar variables individuales; y las griegas ϒ, Δ, ..., con o sin subíndices, para *multisets* finitos de fórmulas.

El sistema CLL está constituido por los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

Axiomas: (1) *A* *A*
(2) ϒ, **0** Δ
(3) ϒ ⊤, Δ

Reglas para las conectivas proposicionales:

L $\dfrac{\qquad}{\quad}$ R $\dfrac{\Gamma \quad \Delta}{\Gamma \quad , \Delta}$

L_1 $\dfrac{\Gamma \quad \Delta}{\Gamma, 1 \quad \Delta}$ R_1 $\dfrac{\qquad}{1}$

L $\dfrac{\Gamma, A, B \quad \Delta}{\Gamma, A \; B \quad \Delta}$ R $\dfrac{\Gamma_1 \quad A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \quad B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad A \; B, \Delta_1, \Delta_2}$

$L_\&$ $\dfrac{\Gamma, A \quad \Delta}{\Gamma, A\&B \quad \Delta}$ $\dfrac{\Gamma, B \quad \Delta}{\Gamma, A\&B \quad \Delta}$ $R_\&$ $\dfrac{\Gamma \quad A, \Delta \quad \Gamma \quad B, \Delta}{\Gamma \quad A\&B, \Delta}$

L $\dfrac{\Gamma_1, A \quad \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \quad \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \, A \quad B \quad \Delta_1, \Delta_2}$ R $\dfrac{\Gamma \quad A, B, \Delta}{\Gamma \quad A \quad B, \Delta}$

L $\dfrac{\Gamma, A \quad \Delta \quad \Gamma, B \quad \Delta}{\Gamma, A \quad B \quad \Delta}$ R $\dfrac{\Gamma \quad A, \Delta}{\Gamma \quad A \quad B, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \quad B, \Delta}{\Gamma \quad A \quad B, \Delta}$

L_o $\dfrac{\Gamma_1 \quad A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \quad \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A\_\mathrm{o}B \quad \Delta_1, \Delta_2}$ R_o $\dfrac{\Gamma, A \quad B, \Delta}{\Gamma \quad A\_\mathrm{o}B, \Delta}$

L_Y $\dfrac{\Gamma \quad A, \Delta \quad \Gamma, B \quad \Delta}{\Gamma, A\mathrm{Y}B \quad \Delta}$ R_Y $\dfrac{\Gamma, A \quad \Delta}{\Gamma \quad A\mathrm{Y}B, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \quad B \; \Delta}{\Gamma \quad A\mathrm{Y}B, \Delta}$

Reglas para los cuantificadores:

L $\dfrac{\Gamma, A^x_t \quad \Delta}{\Gamma, \quad xA \quad \Delta}$ R $\dfrac{\Gamma \quad A^x_t, \Delta}{\Gamma \quad xA, \Delta}$

L $\dfrac{\Gamma, A^x_t \quad \Delta}{\Gamma, \quad xA \quad \Delta}$ R $\dfrac{\Gamma \quad A^x_t, \Delta}{\Gamma \quad xA, \Delta}$

En la regla R la variable *y* no es libre en Γ y en la regla L , *y* no es libre en Γ, en Δ ni en x*A*.

Reglas para los exponenciales:

$$L_! \quad \frac{\Gamma, A \quad \Delta}{\Gamma, !xA \quad \Delta} \qquad\qquad R_! \quad \frac{!\Gamma \;\; A \quad ?\Delta}{!\Gamma \quad !A, ?\Delta}$$

$$W_! \quad \frac{\Gamma \quad \Delta}{\Gamma, !A \quad \Delta} \qquad\qquad C_! \quad \frac{\Gamma \; !A, !A \quad \Delta}{\Gamma, !A, \Delta}$$

$$L_? \quad \frac{!\Gamma, A \quad ?\Delta}{!\Gamma, ?A \quad ?\Delta} \qquad\qquad R_? \quad \frac{\Gamma \quad A, \Delta}{\Gamma \quad ?A, \Delta}$$

$$W_? \quad \frac{\Gamma \quad \Delta}{\Gamma \quad ?A, \Delta} \qquad\qquad C_? \quad \frac{\Gamma \quad ?A, ?A \quad \Delta}{\Gamma \quad ?A, \Delta}$$

Regla de Corte:

$$\text{Corte} \quad \frac{\Gamma_1 \quad \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \quad \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad \Delta_1, \Delta_2}$$

Nos gustaría observar que la mayoría de los autores no incluyen la implicación aditiva como símbolo primitivo en sus sistemas para la lógica lineal. Alegan que la implicación aditiva no tiene algunas de las propiedades deductivas básicas que se requerirían para una implicación. Por ejemplo, la fórmula (*A*Y*A*) no es derivable. Normalmente, la implicación aditiva es introducida por definición como sigue:

(*A*Y*B*) $=_{\text{def}}$ (*A*_o) *B*

En presencia de dos implicaciones en CLL, tanto esta fórmula (*A*_o) como esta otra (*A*Y **0**) se comportan como negaciones de la fórmula *A*. Ambas implicaciones satisfacen el principio de doble negación en el sentido siguiente[2]:

1) (*A* _o) _o ⇔ *A*
2) (*A*Y **0**) Y **0** ⇔ *A*

En lo que sigue, la expresión ¬*A*, será usada como abreviatura de la fórmula (*A*_o) y denominada "negación involutiva".

Los operadores lógicos del sistema CLL tienen importantes propiedades sintácticas que pasamos a presentar .

Los símbolos **1**, , ⊤ y **0** se comportan como elementos neutros para las conectivas , , & e , respectivamente, esto es,

3) *A* **1** ⇔ *A*
4) *A* ⇔ *A*
5) *A*&T ⇔ *A*
6) *A* **0** ⇔ *A*

Las propiedades de simetría y asociatividad, ejemplificadas abajo para el caso del tensor, valen también para las conectivas , & e .

7) *A* *B* ⇔ *B* *A*
8) *A* (*B* *C*) ⇔ (*A* *B*) *C*

Solamente las conectivas aditivas & y son idempotentes.

9) *A*&*A* ⇔ *A*
10) *A* *A* ⇔ *A*

Las leyes análogas a las de De Morgan valen para los siguientes pares de operadores: (,), (&,), esto es:

11) ¬ (*A* *B*) ⇔ (¬*A* ¬*B*)
12) ¬ (*A* *B*) ⇔ (¬*A* ¬ *B*)
13) ¬ (*A*&*B*) ⇔ (¬ *A* ¬ *B*)
14) ¬ (*A* *B*) ⇔ (¬ *A* & ¬ *B*)

Los operadores exponenciales **?** y **!** son interdefinibles.

15) !*A* ⇔ ¬?¬ *A*
16) ?*A* ⇔ ¬! ¬*A*

De las propiedades citadas arriba, presentaremos sólo la demostración del caso (15). La demostración del caso (16) es similar a la del (15) y las demás se demuestran sin mayores dificultades.

δ !*A* ¬ ?A　　　　　δ ¬ ?A !*A*

e

A A
A, A _o
!A, A _o
!A, ?(A _o)
!A, ?(A _o)
!A ?(A _o) _o def
!*A* ¬ ?A

A A
A A
A, ?(A _o)
! A, ?(A _o)
! A, ?(A _o)
?(A _o) _o ! A def
¬ ?*A* ! A

3. CLL y la eliminación de corte

Siguiendo a Gentzen, decimos que un sistema dado, en el cálculo de secuentes, tiene la propiedad de eliminación de corte si cualquier secuente derivable en este sistema, con la ayuda de la regla de corte, puede ser derivable igualmente sin esta regla (Gentzen, 1969, p. 87).

En *Lectures on linear logic*, Troelstra (1929) muestra que la lógica lineal clásica en el cálculo de secuentes satisface el Teorema de eliminación de corte. La demostración que presenta sigue el mismo estilo y estructura desarrollados por Gentzen (1969, p. 87) para la lógica clásica usual, considerando la ausencia de las reglas estructurales y los nuevos casos que dan cuenta de los operadores lineales.

Con el objetivo de encontrar reducciones adecuadas para esos nuevos casos, Troelstra generaliza la noción de corte. Primero, él define dos tipos especiales de corte, a saber:

Corte! $$\frac{\Gamma_1 \quad \Delta_1, !A \qquad (!A)^n, \Gamma_2 \quad \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad \Delta_1, \Delta_2}$$

Corte? $$\frac{\Gamma_1 \quad \Delta_1, (?A)^n \qquad ?A, \Gamma_2 \quad \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \quad \Delta_1, \Delta_2}$$

En la regla de corte! (corte?), la expresión $(!A)^n$ $((?A)^n)$, con $n > 1$, denota un *mul - tiset* con n copias de la fórmula !*A* (?*A*). Finalmente define corte* como siendo corte, corte! o corte?. Observamos que corte* guarda una gran similitud con la regla *mix* introducida por Gentzen.

Los casos de reducción más interesantes son aquellos que involucran los operadores exponenciales y la regla de contracción. Explicitaremos aquí solamente el caso de la reducción que involucra al operador **!** y **l**a regla de contracción.

Sea que π es la derivación que sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{!\Gamma_1 \quad ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \quad ?\Delta_1, !A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{!A, !A, \Gamma_2 \quad \Delta_2}}{!A\ \Gamma_2 \quad \Delta_2}}{!\Gamma_1\ \Gamma_2 \quad ?\Delta_1, \Delta_2}\ \text{corte}$$

Entonces π es transformada en:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{!\Gamma_1 \quad ?\Delta_1, A}}{!\Gamma_1 \quad ?\Delta_1, !A} \qquad \dfrac{\Sigma_2}{!A, !A, \Gamma_2 \quad \Delta_2}}{!\Gamma_1\ \Gamma_2 \quad ?\Delta_1, \Delta_2}\ \text{corte*}$$

La prueba de eliminación de corte sigue por inducción en el grado de π (el grado de una derivación π es el grado (*rank*) máximo de un corte en π, que está determinado por la complejidad de la fórmula cortada). Una vez elegida la aplicación del corte con grado máximo, esta aplicación es eliminada por inducción en el nivel de este corte (el nivel de un corte en una derivación es el número de secuentes de la subderivación que termina con el corte considerado). En el caso de arriba, _ es transformada en una derivación en la cual la aplicación de corte indicada tiene nivel menor.

4. La suficiencia de la lógica lineal

¿La lógica lineal es suficiente en el sentido de que tiene el mismo poder de expresabilidad que la lógica intuicionista? En otros términos,¿es posible traducir la lógica intuicionista a la lógica lineal? La respuesta de Girard a esta pregunta es que sí. Girard (1987) define una función * que asocia fórmulas del lenguaje de la lógica intuicionista IL[3] a fórmulas del lenguaje de la lógica lineal y muestra que esa función es una traducción de la lógica intuicionista a la lógica lineal.

Girard define la función* como sigue:

$(A)^* =_{def} A$, para toda fórmula atómica A

$(\ )^* =_{def} \mathbf{0}$

$(A \rightarrow B)^* =_{def}$!A^* _o B^*
$(A \;\; B)^* =_{def}$ A^* & B^*
$(A \;\; B)^* =_{def}$!A^* !B^*
$(\;\; xA)^* =_{def}$ xA^*
$(\;\; xA)^* =_{def}$ $x!A^*$

Más precisamente, Girard muestra que la función *, como está definida arriba, es correcta y completa (*faithful*) en el sentido siguiente:

$\delta_{IL}\ \Gamma \quad A$ sse $\delta_{CLL}\ !\Gamma^* \quad A^*$

Girard señala que la demostración de que la función * es correcta, esto es, si δ_{IL} $\Gamma \quad A$, entonces $\delta_{CLL}\ !\Gamma^* \quad A^*$, se sigue por indución en la longitud de la demostración considerando que IL, en el cálculo de secuentes, satisface la eliminación de corte.

Para justificar la completitud de la función *, si $\delta_{CLL}\ !\Gamma^* \quad A^*$, entonces $\delta_{IL}\ \Gamma \quad A$, Girard hace uso del siguiente argumento: como la lógica lineal satisface el teorema de eliminación de corte y, consecuentemente, el Principio de subfórmula, entonces $!\Gamma^*$ y A^* necesariamente pertencen al fragmento {_o, &, , **0**, **!**, y } de la lógica lineal[4]. Luego continúa, se puede suponer que existe una derivación π^*, en ese fragmento, cuyo último secuente es $!\Gamma^* \quad A^*$. Girard concluyó su argumentación afirmando que si eliminamos todas las apariciones del símbolo **!** de la derivación π^* y sustituimos en ella todas las apariciones de los símbolos lineales _o, &, y **0** por →, ., - y , respectivamente, obtendremos una derivación intuicionista de $\Gamma \quad A$.

Schellinx (1991) señaló problemas en esta demostración. Observó que, aunque fuese correcta la afirmación de Girard de que * es una traducción de la lógica intuicionista a la lógica lineal, la demostración de la completitud no es tan simple e inmediata como Girard sugiere.

Recordemos que Girard estaba considerando la formulación usual de la lógica intuicionista en el cálculo de secuentes y en esta formulación no están permitidos secuentes con más de un consecuente. Por otro lado en el fragmento *f*(CLL) es posible que tengamos una derivación para el secuente $!\Gamma^* \quad A^*$ en la cual haya ocurrencias de secuentes con más de un consecuente. Esto se da a partir de la combinación del axioma para la constante **0** y de la regla de introducción a la izquierda para _o.

Para elucidar mejor esta cuestión, veamos un ejemplo de una derivación del fragmento *f*(CLL) cuyo secuente final es !Γ* *A**. Sean *A*, *B* y *C* fórmulas atómicas y !Γ* el *multiset* constituido por las fórmulas !**0**, !(!*B* _o*A*) e !(!*C* _o**0**).

0 !*C*, !*B* *A* *A*
0, !*B* _o*A* !*C*, *A*
!**0**, !*B* _o*A* !*C*, *A*
!**0**, !(!*B* _o*A*) !*C*, *A* **0**
!**0**, !(!*B* ƒo*A*), !*C* ƒo**0** *A*
!**0**, !(!*B* _o*A*), !(!*C* _o**0**) *A*

Podemos observar que en esta derivación de !Γ* *A**, si simplemente eliminamos las ocurrencias del símbolo **!** y sustituimos las ocurrencias de los símbolos **0** y _o por y → respectivamente, como sugiere Girard, no obtendremos una demostración de Γ *A* en la lógica intuicionista, como se deseaba. Claramente, en esta derivación, tenemos ocurrencias de secuentes con más de un consecuente.

Schellinx resuelve el problema de la completitud de la función * de una forma un poco más elaborada, como veremos en lo que sigue.

En primer lugar construyó una nueva formulación en el cálculo de secuentes para la lógica intuicionista, en la cual la restricción de tener sólo un consecuente en un secuente está aplicada únicamentre a las reglas $R_{\rightarrow}$ y R . D

Llama a esta variante de la lógica intuicionista "$IL^{>}$"y muestra que $IL^{>}$ satisface el teorema de eliminación de corte y, además, es equivalente al sistema IL.

En segundo lugar, Schellinx muestra que si tenemos una derivación de !Γ* *A** en el fragmento *f*(CLL) sin aplicaciones de la regla de corte, es posible transferir todas las aplicaciones de las reglas $R_{\rightarrow}$ y R para el final de la derivación. Además, muestra también, que en esta serie de aplicaciones de las reglas $R_{\rightarrow}$ y R , en el final de la derivación, todos los secuentes tienen como máximo un consecuente.

Finalmente, usa el procedimiento sugerido por Girard, esto es, eliminar todas las apariciones del símbolo **!** de la derivación indicada y sustituir en ella todas las apariciones de los símbolos lineales _o, &, y **0** por →, ., - y respectivamente.

Consecuentemente obtendremos una derivación de Γ *A* en $IL^{>}$. De esta forma, queda claro que la derivación obtenida en este proceso es realmente una derivación intuicionista.

5. Conclusión

El desarrollo de sistemas lógicos de deducción natural se ha vuelto cada vez más usual gracias a la similitud entre sus reglas de inferencia y los procedimientos comunes del razonamiento intuitivo y, principalmente, porque posibilita un uso elegante de la lógica en la ciencia de la computación a través del isomorfismo *Curry-Howard*, que relaciona demostraciones intuicionistas en deducción natural y sus procesos de normalización con programas y sus ejecuciones.

Con respecto a la lógica lineal, ya se han dado grandes avances en esta dirección. En Paiva *et al.* (1992), podemos encontrar una de las primeras formulaciones de la lógica lineal intuicionista en dedución natural. Otros trabajos fueron desarrollados con ese objetivo, tales como el de Martini y Massini (1997) y el de Maraist (1999). También recientemente, en Medeiros (2001) se presenta un sistema proposicional clásico en deducción natural con conclusión única para el fragmento multiplicativo proposicional de la lógica lineal clásica.

Entretanto, todavía no disponemos de un sistema de deducción natural para la lógica lineal clásica que contemple todos los operadores aditivos y multiplicativos, que sea cerrado bajo sustituiciones y que satisfaga el teorema de normalización. La principal dificultad de esto reside en el hecho de que no hemos conseguido una buena formulación para las reglas de inferencia de los operadores lineales *par* y *costo - rage*, pues en sus formulaciones en el cálculo de secuentes, ambas contienen secuentes com múltiples conclusiones. Esto implica introducirnos en cuestiones más amplias y complejas que están más allá de la concepción inicial de los sistemas de dedución natural, tal como fueron desarrollados por Gentzen (1969) y Prawitz (1965).

6. Bibliografía

Gentzen, G. (1969). "Investigations into natural deduction". Szabo, M. E. *The Co - llected paper of Gerhard Gentzen*. Amsterdam, North-Holland, pp. 68-131.

Girard, J.Y. (1987). "Linear logic". Theoretical Computer Science, 50.

Maraist, J. (1999). "Classical linear natural deduction and the linear _ calculus: a preliminary repor" (no publicado).

Martini, S.; Massini, A. (1997). "Experiments in linear natural deduction". Theoretical Computer Science, v. 176(1-2), pp. 159-173.

Medeiros, M. da P. N.(2001). *Traduções via teoria da prova: aplicações à lógica linear.* Tese de Doutorado, Rio de Janeiro, PUC-RJ.

Medeiros, M. P. N.; Pereira, L. C. (2000). "Translation and normalization procedures" *Abstracts of Contributed Papers – Logic Colloquium***.** p. 28.

Paiva, V. *et al*. (1992). "Term assignment for intuitionistic linear logic". University of Cambridge Computer Laboratory (Technical Report, 262).

Pereira, L. C.(1999). "Translations and normalization: applications to linear logic". Crouch, R. *et al.* (eds.*). Linear logic and applications.* 248, p. 19, (abstract).

Pravitz, D. (1965). *Natural deduction*. Stockholm, Almqvist & Wiksel.

Schellinx, H. (1991). "Some syntactical observations on linear logic". Journal of Logic and Computation, v. 1, n. 4, pp. 537-559.

Troelstra, A. S. (1992). *Lectures on linear logic.* Stanford, CSLI.

Notas:

[1] Conservamos las expresiones inglesas para estos operadores lineales.

[2] Notación: $\Gamma \Leftrightarrow \Delta$ significa $\Gamma \quad \Delta$ e $\Delta \quad \Gamma$.

[3] La lógica intuicionista IL a la que nos estamos refiriendo aquí es el conocido sistema en el cálculo de secuentes presentado en Gentzen (1969, p. 81).

[4] Para facilitar la exposición del argumento, llamaremos *f*(CLL) a este fragmento de la lógica lineal.