UCES
Revista Científica de
Vol. XI Nº 2 -Primavera 2007

La afinidad no probabilística: una medida de la borrosidad de un subconjunto difuso

Carlos Vega

1. Introducción y conceptos preliminares

La Teoría de Conjuntos Difusos fue introducida por L. Zadeh (1965), con el fin de suministrar un esquema para dar tratamiento matemático adecuado a un sinnúmero de problemas, en los que juega un papel fundamental cierta imprecisión o vaguedad que procede de una especie de ambigüedad intrínseca.

El empleo de modelos ideales, no realizables en la práctica, ha dado buenos resultados en algunos campos; sin embargo, una aproximación que en muchos problemas resulta más realista, es la de considerar conjuntos difusos, de forma que se asocien propiedades a cierto universo de objetos sin imponer acotaciones severas sobre los sistemas que estamos estudiando.

A partir de la introducción del concepto de conjuntos difusos, se ha desarrollado una generalización de distintas teorías matemáticas como la de Probabilidad, Topología y otras; y se ha estudiado, aunque menos exhaustivamente, el tema de la medición de la borrosidad (ver Klir & Folguer, 1988).

En este trabajo se propone la introducción de una familia parametrizada de medidas de borrosidad, construida a partir de una familia de índices de "afinidad" entre dos distribuciones probabilísticas. Sea X un conjunto de elementos (referencial). Un subconjunto difuso de X se define intuitivamente a través de una propiedad, que los elementos de X no necesariamente tienen que satisfacer o no, sino que pueden cumplir con "cierto grado". De este modo:

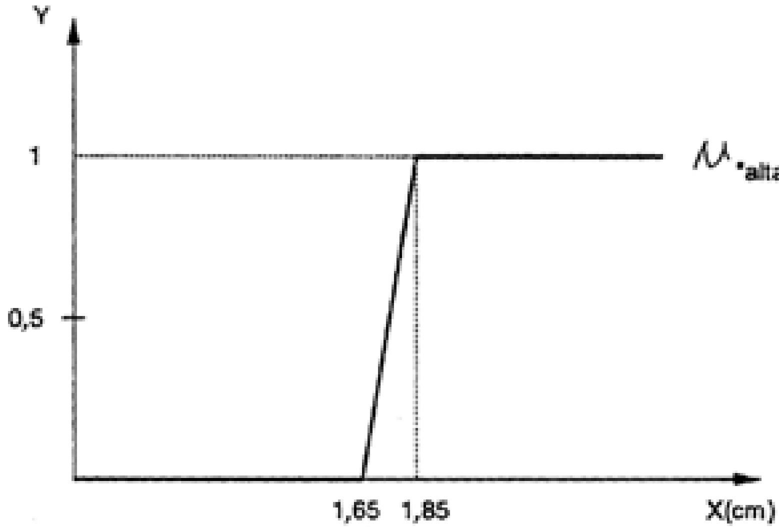
Definición 1.1

Un *subconjunto difuso* Ã de X se caracteriza por una fundón de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$: X-> [0,1] que a cada elemento x perteneciente a X le asigna un número real en el intervalo real inicial [0,1], de forma que $\mu_{\tilde{A}}(x)$ representa el grado de pertenencia de x a Ã (o grado de compatibilidad o acuerdo de x con la propiedad que define a Ã).

Una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$ constituye una generalización de la función característica o indicador de un subconjunto ordinario de X.

Ejemplo: ilustro el concepto con un ejemplo clásico en el que Ã es el correspondiente a "individuos altos". ¿Cómo podemos afirmar que una persona es alta? ¿Podemos considerar a un individuo de 180 cm de altura como “alto” y a uno de 175 cm como “no alto”?

La borrosidad corresponde a incertidumbre en la descripción de la propiedad que define al conjunto Ã, sobre los elementos de cierto conjunto de individuos X. Parece natural considerar que una persona con altura x no tiene por qué ser necesariamente alta (o, mejor aún, que su altura corresponda a una persona alta) o no, sino que cumpla con la propiedad de “ser alto” con un grado más o menos elevado, grado que representaremos por $\mu_{\tilde{A}}(x)$. De acuerdo con esa observación, la figura 1 muestra una posible descripción gráfica de Ã en términos de un subconjunto difuso.



El problema de la medición de la borrosidad que afecta a un subconjunto difuso ha estado ligado a la evolución de la Teoría de los Conjuntos Difusos. En general, una ***medida de borrosidad*** consiste en una aplicación $F\colon \tilde{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\tilde{P}$ X) es el conjunto de todos los subconjuntos difusos de X (denominado también partes difusas de X) y, para cada Ã perteneciente a $\tilde{P}(X)$, $\tilde{P}(X)$ cuantifica el ***grado de borrosidad de Ã.***

Para que una medida de borrosidad pueda considerarse idónea, debe satisfacer además ciertas condiciones axiomáticas, aunque algunas de estas no se han formulado aún de manera única.

Estas condiciones pueden enunciarse brevemente como sigue:

F.1 (Anulación exclusiva sobre subconjuntos clásicos)

Si Ã pertenece a $\tilde{P}(X)$, F (Ã) = 0 si y solo si $\mu_{\tilde{A}}$ coincide con la función indicador de un subconjunto clásico de X.

F.2 (decrecimiento con el aumento de nitidez)

Si Ã es "más nítido que" Ã´ (con Ã, Ã´ perteneciente a $\tilde{P}$ (X)), entonces F(Ã) ≤ F(Ã´).

F.3 (borrosidad máxima)

El valor máximo de F en $\tilde{P}$ (X) se alcanza en un Ã que sea "maximalmente difuso".

Las condiciones axiomáticas F.2 y F.3 involucran conceptos "ser mas nítidos que" y ser "maximalmente difuso", de los que no existe una definición universal.

En la bibliografía existente sobre la medición de borrosidad se han propuesto varias medidas, la mayoría de las cuales han coincidido en admitir las definiciones siguientes:

I) Ã es "más nítido que" Ã´, si:
$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}'}(x)$, para todo x perteneciente a X con $\mu_{\tilde{A}'}(x) \leq ½$, y

$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{A}'}(x)$, para todo x perteneciente a X con $\mu_{\tilde{A}'}(x) \geq ½$

II) Ã es "maximalmente difuso" si $\mu_{\tilde{A}'}(x) = ½$ para todo x perteneciente a X

La admisión de esta dos definiciones es coherente con la admisión de la definición de complementario difuso de un subconjunto difuso Ã de X como el subconjunto difuso $(\tilde{A})^c$ de X tal que $\mu_{(\tilde{A})}{}^c(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, para todo x perteneciente a X, (Zadeh, 1965). Para esta definición, el equilibrio del complementario difuso es el valor ½.

Los axiomas F.1, F.2 y F.3 determinan una axiomática generalizada para las medidas de borrosidad, de manera que esos axiomas dejan una gran libertad de elección de medidas de borrosidad.

Algunos autores (ver Knopfmacher (1975) y Gottwald (1979)) han sugerido algunas propiedades o condiciones adicionales deseables para las medidas de borrosidad en las que se suponen aceptadas las definiciones I y II anteriores. Entre estas propiedades, cabe destacar las siguientes:

F.*4. (invarianza por complementación)
Si Ã pertenece a $\tilde{P}$ (X), entonces $F((\tilde{A})^c) = F(\tilde{A}9$

F.*5. (efecto de las pertenencias constantes sobre la borrosidad)

Si $\tilde{I}_{ß}$ pertenece a $\tilde{P}$ (X) es el subconjunto difuso de X cuya función de pertenencia es constante e igual a ß en todo X (con ß perteneciente al intervalo inicial [0,1]), la función g : [0,1] ->R tal que g(ß) = $F(I^*_{ß})$ es estrictamente creciente en [0,½] y, como consecuencia de F*.4, es estrictamente decreciente en [½, 1].

Knopfmacher (1975) y Gottwald (1979) consideran, además, otras propiedades como las de ser funciones continuas y valoraciones no negativas.

Como la borrosidad representa un tipo especial de incertidumbre, en ocasiones se han considerado algunas medidas de la Teoría de la Información Estadística como base para definir medidas de borrosidad. En este sentido, De Luca & Termini (1972) definieron una ***entropía no probabilística*** (según su propia denominación) que tomaba como base la entropía de Shannon, y que para un subconjunto difuso Ã de X venía dada por:

$$F(\tilde{A}) = - \sum_{x \in X} \left\{ \mu\tilde{A}(x) \log \mu\tilde{A}(x) + [1 - \mu\tilde{A}(x)] \log[1 - \mu\tilde{A}(x)] \right\}$$

(bajo el supuesto de que X sea un conjunto discreto)

El objetivo perseguido en este trabajo es el de emplear otras medidas de la Teoría de la Información con el mismo fin. Estas medidas son ciertos índices de ***afinidad*** entre dos distribuciones de probabilidad, que evalúan el grado de consonancia o similitud entre esas distribuciones. Las razones para esta elección se encuentran en algunas ideas directrices que orientan las últimas investigaciones sobre la medición de la borrosidad.

Estas ideas señalan que la forma más natural de expresar el grado de borrosidad de un subconjunto difuso es en términos de la falta de distinción entre el subconjunto difuso y su complementario. De hecho, esta falta de distinción es lo que diferencia a los subconjuntos difusos de los clásicos, y cuanto más difiere un subconjunto de su complementario más borroso es.

Definición de la afinidad no probabilística de orden ß

Para seguir el enfoque que acabo de comentar, se eligen los índices de afinidad basados en una extensión de la distancia de Hellinger propuesta por Chernoff (1952) (ver también Good & Smith, 1985) y que incluye a la conocida medida de Matusita (1967). Estos índices están estrechamente relacionados con la divergencia dirigida máxima (o divergencia dirigida entre dos distribuciones degeneradas en puntos distintos) y la divergencia dirigida entre las dos distribuciones que se consideren.

En el trabajo de Ruiz (1991) puede verse una caracterización axiomática de los índices de afinidad considerados y el estudio de las propiedades más relevantes.

Para lograr que índice de afinidad resultante sea simétrico (puesto que la afinidad entre el conjunto difuso y su complementario debe equivaler a la afinidad entre su complementario y él mismo, siempre que el complementario se defina en forma que satisfaga la propiedad de involución), se recurrió a sumar las divergencias dirigidas respecto de cada una de las dos distribuciones, obteniendo el invariante de Jeffreys correspondiente.

De este modo, se llega a la siguiente definición:

Definición 2.1

Se denomina ***índice de afinidad no-probabilística de orden ß*** a la aplicación $F^{\beta}: \tilde{P}(X) \to R^{+}$ que a cada Ã perteneciente a $\tilde{P}(X)$ le asigna el valor:

$F^{\beta}(\tilde{A}) = \sum_{x \in X} \left\{ [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta} [\mu_{(\tilde{A})^c}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta} [\mu_{(\tilde{A})^c}(x)]^{\beta} \right\}$ tal que $0<\beta<1$ (supuesto que X sea un conjunto discreto) y con $(\tilde{A})^c$ = complementario difuso de A

Sobre las definiciones más usuales para el complementario $(\tilde{A})^c$, pueden verse la dada por Zadeh (1965) y otras recogidas en los textos de Dubois & Prade (1980) y Klir & Folguer (1988), donde figuran algunas discusiones de interés sobre la noción de complementario difuso.

Por otro lado, la restricción de ß a [0,1] obedece a la necesidad de que la medida esté definida incluso cuando exista algún x perteneciente a X con $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$
ó con $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, (lo que no resulta en absoluto infrecuente).

3. Estudio de las propiedades de la afinidad probabilística como medida de la borrosidad

Una vez establecida la familia de índices de borrosidad precedente, es natural examinar si sus elementos satisfacen las condiciones axiomáticas F.1, F.2 y F.3.

Este examen se simplifica considerablemente, si se comprueba que la familia de la *definición 2.1* está contenida dentro de una familia generalizada de medidas de borrosidad introducida por Gottwald (1979), y que se expresa de la siguiente manera:

$$F(\tilde{A}) = h\left(\sum_{x \in X} g_x(\mu_{\tilde{A}}(x))\right)$$

donde para todo x perteneciente a X, las funciones:

$[0,1] \to R^{+}$

Verifican que:

i) $g_x(0) = g_x(1) = 0$

ii) g_x monótona creciente en [0,½] y monótona decreciente en [½, 1] para todo x perteneciente a X.

iii) $g_x(½)$ es el único máximo para g_x para todo x perteneciente a X, y h es una función monótona creciente de R^{+} en R^{+}.

esta familia satisface los axiomas F.1 a F.3 con las interpretaciones I y II reseñadas en la sección 1. aunque la familia generalizada sea mucho más amplia que la que se construye en este trabajo, el interés principal de esta última estriba en el criterio seguido para su definición y en el significado intuitivo de ese criterio.

A continuación, se establece la comprobación de que $F^{ß}$ en la *Definición* 2.1 es un elemento de la clase de Gottwald.

Teorema 3.1

Si se acepta que $\mu_{(\tilde{A})'}$ (x) = 1 - $\mu_{(\tilde{A})}$(x) para todo x perteneciente a X, entonces la "afinidad no probabilística" es una medida de borrosidad que pertenece a la clase:

$$F(\tilde{A}) = h(\sum_{x \in X} g_x(\mu_{\tilde{A}}(x))$$

Tomando h =1_D (identidad) y $g_{x} = f_{ß}$ **para todo x con:**

$$f_{\beta}(x) = x^{\beta}(1-x)^{1-\beta} + x^{1-\beta}(1-x)^{\beta} \text{ con } 0< ß < 1$$

Demostración

Como la función h es monótona creciente, demuestro que las funciones f_{β} satisfacen las condiciones i, ii y iii.

i) es evidente que $f_{ß}(0) = f_{ß}(1) = 0$

ii) y iii): Para estudiar el crecimiento de f_{β} (x) determinamos:

derivando

$$f'_{\beta}(x) = \beta x^{\beta-1} - (1-\beta)x^{\beta}(1-x)^{-\beta} + (1-\beta)x^{-\beta}(1-x)^{\beta} - \beta x^{1-\beta}(1-x)^{\beta-1} =$$

$$= \beta[(1-x)/x]^{1-\beta} - (1-\beta)[x/(1-x)]^{\beta} + (1-\beta)[(1-x)/x]^{\beta} - \beta[x/(1-x)]^{1-\beta}$$

Se puede verificar que $f_{ß}(½) = 0$

Denotando y = x/(1-x), entonces:

$$f''_{\beta}(x) = [-\beta(1-\beta)(1/y)^{-(\beta-2)} - (1-\beta)\beta y^{\beta-1} - (1-\beta)\beta(1/y)^{\beta+1} - \beta[1-\beta)y^{-\beta}]/(1-x)^2$$

Al ser 0<ß< 1 e y >0 se tiene que la derivada segunda calculada es menor que cero, de modo que la función es cóncava (hacia abajo)

Como $f_{\beta}(½) = 0$ y f_{β} cóncava, se cumple que f_{β} alcanza un máximo en x=½ de tal forma que las condiciones i, ii y iii se satisfacen para f_{β} por lo tanto:

$$F^{ß}(\tilde{A}) = \sum_{x \in X} \left\{ [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta} [\mu_{(\tilde{A})'}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta} [\mu_{(\tilde{A})'}(x)]^{\beta} \right\} \text{ tal que } 0<ß<1$$

Es una medida de borrosidad

Por lo tanto, puede comprobarse que:

Teorema 3.2

$F^{ß}(\tilde{A})$ es una valoración no negativa sobre [0,1], es decir

$$F^{\beta} = (\tilde{A} \bigcup \tilde{B}) + + F^{\beta}(\tilde{A} \bigcap \tilde{B}) = F^{\beta}(\tilde{A}) + F^{\beta}(\tilde{B})$$

Demostración:

Si $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}} : X \longrightarrow [0,1]$ son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos Ã, $\tilde{ß}$ pertenecientes a $\tilde{P}$ (X), se define punto por punto los elementos $\mu_{\tilde{A} \bigcup \tilde{B}}$ y $\mu_{\tilde{A} \bigcap \tilde{B}}$

(definiciones originales de unión e intersección entre dos conjuntos difusos (Zadeh (1965)) como:

$$\mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}}(x) = \max\,[\mu_{\tilde{A}}(x)\,,\ \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

$$\mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}}(x) = \min\,[\mu_{\tilde{A}}(x)\,,\ \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

Al ser

$$F^{\beta}\left(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}\right) = \sum_{x} [\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{\beta}(1-\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{1-\beta} + (\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{1-\beta}$$
$$(1-\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{\beta}]$$

$$F^{\beta}\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}\right) = \sum_{x} (\min[(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{\beta}(1-\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{1-\beta} + (\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{1-\beta}(1-\min$$
$$[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{1-\beta}(1-\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)])^{\beta}]$$

Verificándose que:

$$F^{\beta}(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \sum_{x} ([\mu_{\tilde{B}}(x)]^{\beta}[1-\mu_{\tilde{B}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{B}}(x)]^{1-\beta}[1-\mu_{\tilde{B}}(x)]^{1-\beta}$$
$$[1-\mu_{\tilde{B}}(x)]^{\beta}) + \sum_{\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x)}^{\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)} ([\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta}[1-\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta}$$
$$[1-\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta})$$

$$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}) = \sum_{x} ([\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta}[1-\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta}[1-\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta}[1-\mu_{\tilde{A}}$$
$$(x)]^{\beta}) + \sum_{\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x)}^{\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)} ([\mu_{\tilde{B}}(x)]^{\beta}[1-\mu_{\tilde{B}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{B}}(x)]^{1-\beta}[1-\mu_{\tilde{B}}(x)]^{\beta})$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}) + F^{\beta}(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}) = \sum_{x} ([\mu_{\tilde{A}}(x)]^{\beta}[\mu_{(\tilde{A})^{c}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta}$$
$$[\mu_{(\tilde{A})^{c}}(x)]^{1-\beta}[\mu_{\tilde{A}}(x)]^{1-\beta}[\mu_{(\tilde{A})^{c}}(x)]^{\beta}) + \sum_{x} [\mu_{\tilde{B}}(x)]^{\beta}[\mu_{(\tilde{B})^{c}}(x)]^{1-\beta} + [\mu_{\tilde{B}}$$

$$(x)]^{1-\beta}\,[\mu_{\widetilde{(B)^c}}(x)]^{\beta}\,) = F^{\beta}(\tilde{A}) + F^{\beta}(\widetilde{B})$$

4. Ejemplo ilustrativo

La aplicación de las medidas introducidas en este trabajo puede ilustrarse mediante el ejemplo siguiente:

$$\tilde{A} = \{(x_1/0),(x_2/0),(x_3/0{,}5),(x_4/1),(x_5/0{,}5),(x_6/0{,}75)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1/0),(x_2/0),(x_3/0),(x_4/0{,}25),(x_5/0{,}75),(x_6/1)\}$$

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B} = \{(x_1/0),(x_2/0),(x_3/0{,}5),(x_4/1),(x_5/0{,}75),(x_6/1)\}$$

$$\tilde{A}\bigcap\tilde{B} = \{(x_1/0),(x_2/0),(x_3/0),(x_4/0{,}25),(x_5/0{,}5),(x_6/0{,}75)\}$$

$$\tilde{A}^c = \{(x_1/1),(x_2/1),(x_3/0{,}5),(x_4/0),(x_5/0{,}5),(x_6/0{,}25)\}$$

$$\widetilde{B}^c = \{(x_1/1),(x_2/1),(x_3/1),(x_4/0{,}75),(x_5/0{,}25),(x_6/0)\}$$

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c = \{(x_1/1),(x_2/1),(x_3/0{,}5),(x_4/0),(x_5/0{,}25),(x_6/0)\}$$

$$(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}) = \{(x_1/1),(x_2/1),(x_3/1),(x_4/0{,}75),(x_5/0{,}5),(x_6/0{,}25)\}$$

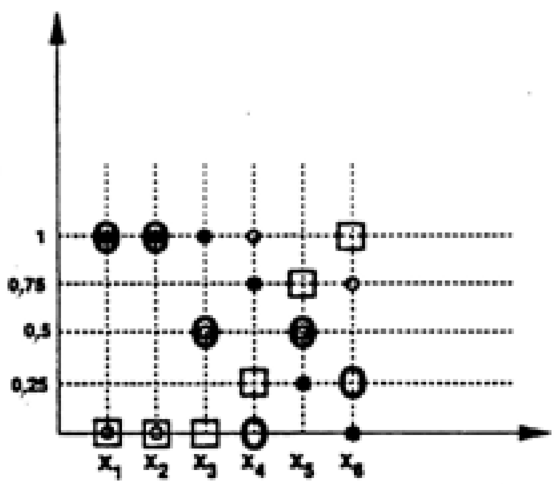


Figura 2: Representación gráfica de la función de pertenencia de los subconjuntos $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A}^c, \tilde{B}^c$

° $\mu_{\tilde{A}}$ 0 $\mu_{\tilde{A}}^{c}$

□ $\mu\ \tilde{B}$ *$\mu\ \tilde{B}$

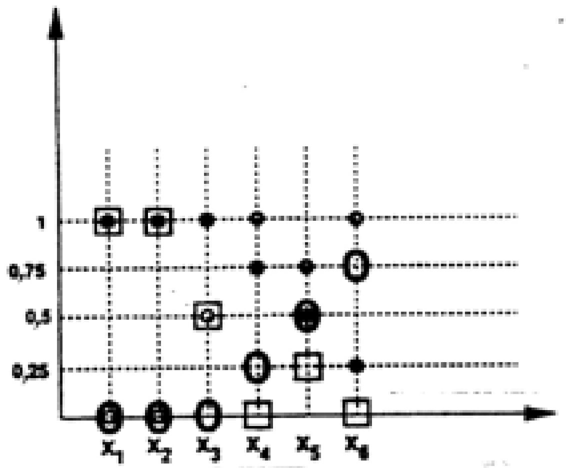


Figura 3: representación gráfica de la función de pertenencia de los subconjuntos: $\tilde{A}\bigcup\tilde{B}, \tilde{A}^c\bigcap\tilde{B}^c, (\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c, (\tilde{A}\bigcap\tilde{B})^c$

* $\mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}}$ * $\mu_{\tilde{A}^c\bigcup\tilde{B}^c}$

0 $\mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}}$ □ $\mu_{\tilde{A}^c\bigcap\tilde{B}^c}$

La borrosidad de cada uno de los subconjuntos difusos anteriores puede cuantificarse por la función:

$$F^{\beta} = \sum_{x}[(\mu_{\tilde{A}}(x))^{\beta}(1-\mu_{\tilde{A}}(x))^{1-\beta} + (\mu_{\tilde{A}}(x))^{1-\beta}(1-\mu_{\tilde{A}}(x))^{\beta}], 0 \prec \beta \prec 1$$

Determinemos la borrosidad para cada uno de ellos:

$$F^{\beta}(\tilde{A}) = 1[(0,5)^{\beta}(0,5)^{1-\beta}] + (0,75)^{\beta}(0,25)^{1-\beta} + (0,75)^{1-\beta}(0,25)^{\beta} = 2 + \frac{3^{\beta}+3^{1-\beta}}{4}$$
$$= F^{\beta}(\tilde{A}^c)$$

$$F^{\beta}(\tilde{B}) = 2[(0,25)^{\beta}(0,75)^{1-\beta} + (0,25)^{1-\beta}(0,75)^{\beta}] = \frac{3^{\beta}+3^{1-\beta}}{2} = F^{\beta}(\tilde{B}^c)$$

$$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}) = (0,5)^{\beta}(0,5)^{1-\beta} + (0,75)^{\beta}(0,25)^{1-\beta} + (0,75)^{1-\beta}(0,25)^{\beta} = 1 + \frac{3^{\beta}+3^{1-\beta}}{4} = F^{\beta}((\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c)$$

$$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}) = 2[(0.25)^{\beta}(0.75)^{1-\beta}] + (0.75)^{\beta}(0.25)^{1-\beta}] + (0.5)^{\beta}(0.5)^{1-\beta} + (0.5)^{1-\beta}$$

$$(0.5)^{\beta} = 1 + \frac{3^{\beta} + 3^{1-\beta}}{2} = F^{\beta}((\tilde{A}\bigcap\tilde{B})^{c})$$

Se observa claramente que se verifica el Teorema 3.2, es decir:

$$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}) = F^{\beta}(\tilde{A}) + F^{\beta}(\tilde{B}) - F^{\beta}(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})$$

A continuación, se detalla la tabla de borrosidad de dichos conjuntos para valores de ß=0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5. Es evidente, por la definición de $F^{ß}$, que si se considera este funcional como una función de ß, esta resulta simétrica respecto de ß=½ en [0,1].

	$F^{\beta}(\tilde{A})$	$F^{\beta}(\tilde{B})$	$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})$	$F^{\beta}(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})$
ß=0,1	2,951	1,902	1,951	2,902
ß=0,2	2,9135	1,827	1,9135	2,827
ß=0,3	2,887	1,7741	1,887	2,7741
ß=0,4	2,8713	1,7425	1,8713	2,7425
ß=0,5	2,866	1,7321	1,866	2,7321

5. Observaciones finales

A lo largo de este trabajo se ha presentado una familia parametrizada de medidas de borrosidad. La contribución principal del trabajo ha residido en el camino seguido para la construcción de dicha familia de medidas: cada medida de borrosidad se ha definido como "una especie de afinidad" entre un conjunto y su complemento y a su vez, cada medida de afinidad entre dos distribuciones de probabilidad podría entenderse como la diferencia entre la divergencia máxima y la divergencia asociada a esas dos distribuciones.

La ventaja de la introducción de este procedimiento de definición de medidas de borrosidad es que permite una generalización inmediata. Esta generalización puede basarse en cualquier medida generalizada de divergencia dirigida (ver Salicrú (1978)), Cuadras (1989)), como la Ø-divergencia de Csiszar (1967) u otras, o en cualquier medida generalizada de afinidad (ver por ejemplo Györfi & Nemetz (1978)).

En relación con el presente trabajo, y con la generalización que acaba de sugerirse, sería interesante y conveniente examinar el papel que juega el parámetro ß, o la forma y características de Ø, dentro de la familia de medidas de borrosidad. Este examen implica dos tipos de estudios: un estudio de carácter teórico analizando las tendencias y los efectos de los distintos valores o propiedades de ß ó de Ø a través de simulación de conjuntos difusos.

Por último, la extensión de los estudios de este trabajo al caso no-discreto es un tema de interés, que presentará menos inconvenientes (como era la pérdida de la no-negatividad al extender la entropía al caso continuo) que la extensión de la entropía probabilística.

Bibliografía

Chernoff, H., *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hipothesis based on the sumo f observations,* EEUU., Ann. Math. Statis*, 23, 493,* 1952.

Csiszar, I., *Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations,* Studia Sci. Math.*, Hungar, 2, 299,* 1967.

Cuadras, C. M., *Distancias estadísticas*, Estadística Española*, 30 (119), 295,* 1998.

Dubois,D. & Prade, H., *Fuzzy sets and systems. Theory and Applications,* Academic Press, New York, 1988.

Good, E.J. & Smith, E.P., *The variance and covariance of a generalized index of similarity especially for a generalization of an index of Hellinger and Bhattacharyya, Comm,* (1988), Statist. Theor. Meth., 14, 3053, 1985.

Gottwald, S., *A note on measures of fuzziness*, *Elect. Inform, Kybern, 15, 221, 1979.*

Györfi, L. & Nemetz, T., *f-dissimilarity: a generalization of the affinity of several distributions,* Ann. Inst. Statis., Math A 30, 105*,* 1978.

Klir, G.J. & Folger, T.A., *Fuzzy sets, uncertainty and information,* New Jersey, Prentice Hal, 1988. Knopfmacher, J.: *On measures of fuzziness*, *J.* Math. Anal. Appl.*, 49, 529,* 1975.