ÁLGEBRA,TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD TEMÁTICA Nº 1 – EJERCICIOS ADICIONALES

Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

Autor: ZAIA, Alejandra Cristina

Ficha de Cátedra:

Carreras: Contador Público- Licenciatura en Ciencias Económicas

Materia: Álgebra

2018

U.C.E.S.

UNIDAD TEMÁTICA Nº 1:

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad F=\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad G=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J=\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el orden de cada matriz.
b) ¿Cuáles de las matrices son cuadradas?
c) ¿Cuáles de las matrices son triangulares inferiores? O bien, ¿triangulares superiores?
d) ¿Cuáles son matrices fila?
e) ¿Cuáles son matrices columna?

2) Sea $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuál es el orden de A?
b) Determinar los siguientes elementos: a_{43}, a_{12}, a_{32}, a_{34}, a_{14}, a_{55}

3) En la matriz A del ejercicio anterior, ¿cuáles son los elementos de la diagonal principal?

4) Escribir una matriz triangular superior de orden 5, suponiendo que todos los elementos que no se requieren que sean 0, sean iguales a 1.

5) Escribir la matriz $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{3\times4}$ que verifique $a_{ij}=2i+3j$.

6) Escribir la matriz $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{2\times2}$ que verifique $b_{ij}=(-1)^{i+j}\left(i^2-j^2\right)$.

7) Si $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{12\times10}$, ¿cuántos elementos tiene A? Si $a_{ij}=1$ para $i=j$ y $a_{ij}=0$ para $i\neq j$, determinar: a_{33}, a_{52}, $a_{10,10}$, $a_{12,10}$.

8) Enunciar los elementos de la diagonal principal: $a)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $b)\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$

9) Enunciar la matriz nula de orden: a) 4; b) 6.

10) Resuelva las siguientes ecuaciones con matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{pmatrix}$

11) Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 acciones de la B, 500 acciones de la C y 300 acciones de la D.
a) Armar una matriz fila que proporcione el número de acciones que se vendieron de cada empresa.
b) Si las acciones se venden en \$20, \$30, \$45 y \$100 por acción, respectivamente, expresar esta información como matriz columna.
c) Mediante operaciones de matrices, determinar cuánto abonó este cliente a su corredor de bolsa.

12) Una compañía tiene sus reportes mensuales de ventas de sus productos expresados como matrices, cuyas filas, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de superlujo que se vendieron; y las columnas también en orden, indican el número de unidades rojas, blancas, azules y moradas que se vendieron. Las matrices para enero (E) y febrero (F) son:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuántos modelos blancos de superlujo se vendieron en enero?
b) ¿Cuántos modelos azules de lujo se vendieron en febrero?
c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares morados?
d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses?
e) ¿En qué mes se vendió mayor cantidad de modelos de lujo?
f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos?
g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

13) Las matrices de insumo y producción, desarrolladas por W. W. Leontief, señalan las interrelaciones que existen entre los diversos sectores de una economía durante cierto período. En la matriz $\boldsymbol{M}$ que aparece enseguida se presenta un ejemplo hipotético de una economía simplificada. Los sectores de consumo son los mismos que los sectores productivos; y pueden considerarse como fabricantes, gobierno, siderurgia, agricultura, hogares, etc. En cada fila se muestra la forma en que los cuatro sectores consumen la producción de un sector dado. Por ejemplo, de la producción total de la industria A, 50 unidades se quedaron en la misma industria A, 70 pasaron a B, 200 a C y 360 a las demás. La suma de los elementos de la fila 1, a saber, 680, da la producción total de A para el período considerado. Cada columna proporciona la producción de cada sector que es consumida por un sector determinado. Por ejemplo, en la fabricación de 680 unidades, la industria A consumió 50 unidades de las suyas propias, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás fabricantes.
a) Encontrar la suma de los elementos para cada columna. Hacer lo mismo para cada fila. ¿Qué se observa al comparar estos totales?
b) Supóngase que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, 136 unidades. Suponiendo estos resultados como un aumento uniforme de 20% de todos sus insumos, ¿en

cuántas unidades tendría que aumentar el sector B su producción? Responda la misma pregunta para C y para todos los otros fabricantes.

		CONSUMIDORES			
		Industria A	Industria B	Industria C	Demás consumidores
FABRICANTES	Industria A	50	70	200	360
	Industria B	90	30	270	320
	Industria C	120	240	100	1050
	Demás productores	420	370	940	4960

14) Realizar las operaciones de matrices que se señalan:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $2.\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $3.\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix}+66$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $-6.\begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

l) $2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-3.\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

15) En los siguientes ejercicios, calcule las matrices que se requieren:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $-B$
b) $-(A-B)$
c) $2.N$
d) $A+B-C$
e) $2.(A-2B)$
f) $0.(A+B)$
g) $3(A-C)+6$
h) $A+(C+2.N)$
i) $2B-3A+2C$
j) $3C-2B$
k) $\frac{1}{2}.A-2.(B+2C)$
l) $2A-\frac{1}{2}(B-C)$

16) Para las matrices A, B y C anteriores, verifique que:

a) $3.(A+B)=3.A+3.B$
b) $(2+3).A=2.A+3.A$
c) $k_1.(k_2.A)=(k_1.k_2).A$
d) $k.(A+B+C)=k.A+k.B+k.C$

17) Expresar la ecuación matricial: $x.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}8\\11\end{pmatrix}$ como un sistema de ecuaciones lineales y resolverlo.

18) En forma inversa a la del ejercicio anterior, escribir el sistema: $\begin{cases}3x+5y=16\\2x-6y=-4\end{cases}$, como ecuación matricial y resolverlo.

19) Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $3.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

b) $3.\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}-4.\begin{pmatrix}7\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\2y\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}x\\y\\4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-24\\14\end{pmatrix}$

d) $x.\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\3x+12-3y\end{pmatrix}$

20) Supóngase que el precio de los productos A, B y C están dados, en ese orden, por la matriz de precios: $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}$. Si se aumentaran los precios en 10%, se puede obtener la matriz de nuevos precios multiplicando P, ¿por qué escalar?

21) a) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\-2 & 1 & -1\\0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\-2 & 4 & -2\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $A.B=C$, obtener los elementos indicados de $C=\left(c_{ij}\right)$: c_{11}, c_{23}, c_{32}, c_{33}, c_{22}, c_{13}

b) Si $A\in\mathbb{R}^{2\times3}$, $B\in\mathbb{R}^{3\times1}$, $C\in\mathbb{R}^{2\times5}$, $D\in\mathbb{R}^{4\times3}$, $E\in\mathbb{R}^{3\times2}$ y $F\in\mathbb{R}^{2\times3}$, indicar el orden y el número de elementos en cada uno de los siguientes casos:

i) $A.E$
ii) $D.E$
iii) $E.C$
iv) $D.B$
v) $F.B$
vi) $B.A$
vii) $E.A$
viii) $E.(A.E)$
ix) $E.(F.B)$
x) $(F-A).B$

22) Enunciar la matriz identidad de orden: a) 4; b) 6.

23) En los siguientes ejercicios, llevar a cabo las operaciones que se señalan:

a) $\begin{pmatrix}2 & -4\\3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\-1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

k) $3.\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]$

n) $3.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-4.\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

o) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

24) En los siguientes ejercicios, calcule las matrices que se requieren:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $G=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $H=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A.B$
b) $B.D$
c) $C.F$
d) $F.E-3.B$
e) $D.G$
f) D^2
g) $E.C$
h) $G.C$
i) $D.I-\frac{1}{3}.G$
j) $B.(D+G)$
k) $3.A-2.B.C$
l) $G.(2D-2I)$
m) $2.I-\frac{1}{2}.G.H$
n) $A.(B.C)$
o) $(D.C).A$

25) Represente los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando multiplicación de matrices:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4r - s + 3t = 9 \\ 3r \quad - t = 7 \\ \quad 3s + 2t = 15 \end{cases}$

26) Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 acciones de la empresa B, 500 acciones de la empresa C y 250 acciones de la empresa D.

a) Armar una matriz fila que proporcione el número de acciones que el cliente compró de cada una de las empresas.
b) Si los precios de cada una de las acciones son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente, expresar esta información como matriz columna.
c) Utilizando multiplicación de matrices, determinar el costo total de las acciones.

27) Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -a & b \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -2 & -a \\ -a & 2 \end{vmatrix}$

28) En los siguientes ejercicios, calcular las expresiones dadas:

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$

b) $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$

29) Determinar $k \in \mathbb{R}$ si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 12$

30) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, determine cada una de las siguientes expresiones:

a) El menor de a_{31}
b) El menor de a_{22}
c) El cofactor de a_{23}
d) El cofactor de a_{32}
e) Si $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{50\times 50}$ y el menor de $a_{43,47}$ es igual a 20, ¿cuánto vale el cofactor de $a_{43,47}$?

31) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, determine cada una de las siguientes expresiones:

a) El menor de a_{32}
b) El menor de a_{24}
c) El cofactor de a_{13}
d) El cofactor de a_{43}

32) Calcule los siguientes determinantes, utilizando cuando sea posible, sus propiedades:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{8} & -2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

p) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

33) En los siguientes ejercicios, hallar el valor de x:

a) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix} = 26$

b) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$

34) Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y se sabe que $|A| = 12$, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de A por 2?

35) Resuelva cada uno de los siguientes sistemas, si es posible, mediante la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x = 4 - 3y \\ y = 6x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ y - 1 = 3x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+2) = 5 \\ 6(x+y) = -8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} w-2z=4 \\ 3w-4z=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{1}{4}z=1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}z=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 0,6x-0,7y=0,33 \\ 2,1x-0,9y=0,69 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x-y+3z=6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x-y+3z=12 \\ x+y-z=-3 \\ x+2y-3z=-10 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ x+y-3z=4 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 3r \quad - \quad t=7 \\ 4r-s+3t=9 \\ 3s+2t=15 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+2z=6 \\ x+8y+z=3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+z=4 \\ 5x+y+3z=5 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x-3y+z=-2 \\ x-6y+3z=-2 \\ 3x+3y-2z=2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x-z=14 \\ y+z=21 \\ x-y+z=-10 \end{cases}$

36) En los siguientes sistemas, utilice la regla de Cramer para hallar únicamente las incógnitas que se señalan:

a) $\begin{cases} x-y+3z+w=-14 \\ x+2y-3w=12 \\ 2x+3y+6z+w=1 \\ x+y+z+w=6 \end{cases}$; $y; w$

b) $\begin{cases} x+y+5z=6 \\ x+2y+w=4 \\ 2y+z+w=6 \\ 3x-4z=2 \end{cases}$; $x; y$

37) Demostrar que la regla de Cramer no es aplicable a : $\begin{cases} 2-y=x \\ 3+x=-y \end{cases}$

38) En cada caso, si la matriz es inversible, hallar su inversa por Gauss-Jordan:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

39) Utilice las adjuntas para obtener las inversas de:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

40) En cada uno de los siguientes sistemas, si la matriz de coeficientes es inversible, resolver el sistema utilizando la inversa; si no lo es, resolverlo mediante el método de Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} 6x+5y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -x+5y=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y=26 \\ 4x+3y=37 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+6y=2 \\ 3x+9y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+8y=3 \\ 3x+12y=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x+z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=-2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+8z=8 \\ -x+4y=36 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+3y+3z=7 \\ 2x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x+3y+3z=7 \\ 2x+y+z=4 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} w+2y+z=4 \\ w-x+2z=12 \\ 2w+x+z=12 \\ w+2x+y+z=12 \end{cases}$

n) $\begin{cases} w+x+z=2 \\ w+y=0 \\ x+y+z=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

41) Dadas las siguientes matrices, calcular $(I-A)^{-1}$:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

42) Efectuar la resolución de los siguientes problemas utilizando la inversa de la matriz implicada.

a) Una fábrica de automóviles produce dos modelos. El primero requiere una hora de mano de obra para la pintura y media hora de mano de obra para el pulido; el segundo requiere una hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Durante cada una de las horas que labora la línea de ensamble, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas para pulido. ¿Qué cantidad de cada modelo puede fabricar si se utilizan todas las horas disponibles de mano de obra?

b) Suponiendo que cada uno de los automóviles del primer tipo requiere 10 dispositivos y 14 mecanismos; y cada automóvil del segundo tipo requiere de 7 dispositivos y 16 mecanismos. La fábrica puede obtener 800 dispositivos y 1430 mecanismos. ¿Cuántos automóviles se pueden fabricar utilizando todas las partes disponibles?

43) Dada la matriz de insumo-producción, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a 600 para A y a 805 para B y obtener el valor total de los otros costos de producción que ello implica.

		Industrias **A**	**B**	**Demanda final**
Industrias	**A**	200	500	500
	B	400	200	900
Otros →		600	800	–––

44) Dada la matriz de insumo-producción, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a:

a) 50 para A, 40 para B y 30 para C.

b) 10 para A, 10 para B y 24 para C.

		Industrias **A**	**B**	**C**	**Demanda final**
Industrias	**A**	18	30	45	15
	B	27	30	60	3
	C	54	40	60	26
Otros →		9	20	15	–––

45) Dada la matriz de insumo-producción, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a:

a) 200 para A y a 300 para B.

b) 64 para A y 64 para B.

		Industrias **A**	**B**	**Demanda final**
Industrias	**A**	40	120	40
	B	120	90	90
Otros →		40	90	–––

46) Dada la matriz de insumo-producción, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a 300 para A, 200 para B y 400 para C.

		Industrias A	Industrias B	Industrias C	Demanda final
Industrias	**A**	100	400	240	260
	B	100	80	480	140
	C	300	160	240	500
Otros		500	160	240	– – –

47) Resolver los siguientes sistemas mediante el método de Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=-11 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 12x+4y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -2x-4y+6z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ 3x \quad +2z-5=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y+5z-1=0 \\ x+y+3z-2=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1-3x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=3 \\ 5x_1-x_2=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1+3x_2=5 \\ 2x_1+x_2=5 \\ x_1+x_2=3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-y-3z=-4 \\ 2x-y-4z=-7 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x-3y-2z=2 \\ x-y-5z=18 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x \quad -4z=8 \\ x-2y-2z=14 \\ x+y-2z=-1 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x \quad +3z=-1 \\ 3x+2y+11z=1 \\ x+y+4z=1 \\ 2x-3y+3z=-8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$

48) Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} w-x-y+4z=5 \\ 2w-3x-4y+9z=13 \\ 2w+x+4y+5z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3w-x+12y+18z=-4 \\ w-2x+4y+11z=-13 \\ w+x+4y+2z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3w-x-3y-z=-2 \\ 2w-2x-6y-6z=-4 \\ 2w-x-3y-2z=-2 \\ 3w+x+3y+7z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} w+x \quad +5z=1 \\ w \quad +y+2z=1 \\ w-3x+4y-7z=1 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} w+x+3y-z=2 \\ 2w+x+5y-2z=0 \\ 3w-x+3y-2z=-8 \\ 3w+2x+8y-3z=2 \\ w+ \quad 2y-z=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} w+x+3y+2z=4 \\ 2w+x+2y+2z=7 \\ w+2x+y+4z=5 \\ 3w-2x+3y-4z=7 \\ 4w-3x+4y-6z=9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+5x_3-10x_4+11x_5=-8 \\ 2x_1+x_2+5x_3 \quad +x_5=6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 + 16x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$

49) Para a cada uno de los siguientes sistemas, determinar si tiene una cantidad infinita de soluciones o si tiene sólo la solución trivial. No resolver los sistemas.

a) $\begin{cases} 0,07x + 0,3y + 0,02z = 0 \\ 0,053x - 0,4y + 0,08z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3w + 5x - 4y + 2z = 0 \\ 7w - 2x + 9y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 5y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y + 12z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ 4x + y + 14z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

50) Resolver cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 8x - 20y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 7y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - 2y - 9z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \\ 3x + y + 13z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} w + x + y + 4z = 0 \\ w + x + 5z = 0 \\ 2w + x + 3y + 4z = 0 \\ w - 3x + 2y - 9z = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0 \\ w - 2x - y + z = 0 \\ w + 2x + 3y + 9z = 0 \\ 2w - 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

51) Resolver los siguientes sistemas por Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 9 \\ 5y - 4x = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5v + 2w = 36 \\ 8v - 3w = -54 \end{cases}$

f) $\begin{cases} p + q = 3 \\ 3p + 2q = 19 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x-3y-2=3x-7y \\ x+5y-2=y+4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5x+7y+2=9y-4x+6 \\ \dfrac{21}{2}x-\dfrac{4}{3}y-\dfrac{11}{4}=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{5}{4} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{6}y=-\dfrac{11}{2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{6} \\ x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4p+12q=6 \\ 2p+6q=3 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ -10x+6y=4 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x+y+6z=3 \\ x-y+4z=1 \\ 3x+2y-2z=2 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+y+z=1 \\ 4x-2y+2z=0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 5x-7y+4z=2 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ -2x+y-3z=15 \\ \dfrac{3}{2}x+\dfrac{4}{5}y+4z=10 \end{cases}$

52) Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución ácida al 24%. Se tienen disponibles soluciones al 20% y al 30%. ¿Cuántos galones de cada solución se deben mezclar para surtir el pedido?

53) Una compañía tiene ingresos gravables por 312.000 dólares. Los impuestos federales son el 25% de lo que quede después de haber pagado los impuestos estatales. Los impuestos estatales son el 10% de lo que quede después de haber pagado los impuestos federales. Halle el valor de ambos impuestos.

54) Un fabricante de muebles para comedor produce dos estilos: norteamericano clásico y contemporáneo. De experiencias pasadas, los administradores han determinado que se puede vender 20% más del estilo norteamericano clásico que del estilo contemporáneo. Se obtienen utilidades de $250 sobre cada conjunto de estilo norteamericano clásico que se venda y de $350 sobre cada uno de los contemporáneos. Si, para el año siguiente, los administradores desean obtener utilidades totales de $130.000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben vender?

55) A una empresa de encuestas se le otorgó un contrato para llevar a cabo un trabajo de evaluación de producto para una firma. Se entrevistó a un total de 250 personas. La empresa reportó que la gente a la que le gustaba el producto era 62,5% más que aquella a la que no le gustaba. Sin embargo, el reporte no señaló que el 16% de las personas entrevistadas no dieron respuesta. ¿Cuántas personas entrevistadas gustaban del producto? ¿A cuántas no le gustaban? ¿Cuántas personas no dieron respuesta?

56) Una compañía fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whynton. En la planta de Exton, los costos fijos son de $7000 al mes y el costo de fabricar cada calculadora es $7,5. En la planta de Whynton los costos fijos son de $8800 mensuales y se requieren $6 para fabricar cada unidad. El siguiente mes la compañía debe fabricar 1500 calculadoras. ¿Cuántos debe fabricarse en cada planta para que sean iguales los costos totales en cada una?

57) Un vendedor mayorista de café mezcla tres tipos de producto que se venden en $2,20, $2,30 y 2,60 por libra, para obtener 100 libras de café que cuesta $2,40 la libra. Si el vendedor utiliza la misma cantidad de los dos cafés de mayor precio, ¿qué cantidad debe utilizar de cada tipo en la mezcla?

58) Una compañía paga a sus vendedores con base en cierto porcentaje de los primeros $100.000 de ventas, más otro porcentaje sobre el excedente de los $100.000. Si un vendedor ganó $8500 en ventas de $175.000 y otro vendedor, $14.800 en ventas de $280.000, determinar ambos porcentajes.

59) En algunos reportes noticiosos, se comparan las utilidades de alguna compañía durante este año (T) con las del año pasado (L), pero no siempre se proporcionan los valores reales de T y L. Este año una compañía obtuvo utilidades por 20.000.000 por encima de las obtenidas el año anterior. Las utilidades aumentaron en 25%. A partir de estos datos, obtener T y L.

60) Una empresa fabrica unidades de control industrial. Sus nuevos modelos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, utilizan 6 piezas M y 3 piezas N. Para fabricar cada unidad de Argón II utilizan 10 piezas M y 8 piezas N. La compañía recibe un total de 760 piezas M y 500 piezas N de su proveedor cada día. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede fabricar la compañía diariamente, sabiendo que se utilizan todas las piezas?

61) Una persona realizó dos inversiones y el porcentaje de rendimiento anual que recibió sobre cada una de ellas fue igual. De la cantidad total invertida, $\frac{3}{10}$ de ella más $600 se invirtieron en una

empresa de riesgo y al final del primer año la persona recibió un rendimiento de \$384. Si el rendimiento general después del primer año fue de \$1120, hallar la cantidad total invertida.

62) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla. La compañía tiene en almacén 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Para su producción de final de temporada la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	***Plástico***	***Aluminio***
Sillas	**1**	**1**	**2**
Mecedoras	**1**	**1**	**3**
Sillones	**1**	**2**	**5**

63) Se invirtió un total de \$35.000 a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés para el primer año fue de \$2.830, que no se reinvirtió. En el segundo año, la cantidad inicialmente invertida al 9% no obtuvo ese porcentaje, sino el 10% y las demás tasas permanecieron igual. El interés total para el segundo año fue de \$2.960. ¿Cuánto se invirtió a cada una de las tasas?

64) Una compañía paga \$8 por hora a sus trabajadores calificados de su departamento de ensamble. A los trabajadores semicalificados de ese departamento se les paga \$4 por hora. A los empleados del departamento de envíos se les paga \$5 por hora. Debido a un aumento de los pedidos, la compañía necesita tener un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamble y envíos. Pagará un total de 370 por hora a estos empleados. Debido a una cláusula del contrato de trabajo, debe haber el doble de trabajadores semicalificados, en comparación con los calificados. ¿Cuántos trabajadores calificados, semicalificados y empleados del departamento de envíos debe contratar la compañía?

65) En los siguientes ejercicios, la primera ecuación es una ecuación de oferta y la segunda es una ecuación de demanda. Si p representa el precio por unidad y q representa el número de unidades. Halle la cantidad y precio de equilibrio. En los ítems a) a d) realice un gráfico de la situación:

a) $\begin{cases} p = \frac{3}{100}q + 2 \\ p = -\frac{7}{100}q + 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} p = \frac{1}{2000}q + 3 \\ p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 35q - 2p + 250 = 0 \\ 65q + p - 537{,}5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 246p - 3{,}25q - 2460 = 0 \\ 410p + 3q - 14.452{,}5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} p = 2q + 20 \\ p = 200 - 2q^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} p = (q+10)^2 \\ p = 388 - 16q - q^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} p = \sqrt{q+10} \\ p = 20 - q \end{cases}$

h) $\begin{cases} p = \frac{1}{5}q + 5 \\ p = \dfrac{3000}{q+20} \end{cases}$

66) En los siguientes ejercicios, y_{TR} representa los ingresos totales y y_{TC} representa los costos para un fabricante. Si q representa el número de unidades. Halle la cantidad y precio de equilibrio. En los ítems a) a d) realice un gráfico de la situación:

a) $\begin{cases} y_{TR} = 3q \\ y_{TC} = 2q + 4500 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y_{TR} = 14q \\ y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_{TR} = 0{,}05q \\ y_{TC} = 0{,}85q + 600 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y_{TR} = 0{,}25q \\ y_{TC} = 0{,}16q + 360 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y_{TR} = 100 - \dfrac{1000}{q+10} \\ y_{TC} = q + 40 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y_{TR} = 0{,}1q^2 + 7q \\ y_{TC} = 2q + 500 \end{cases}$

67) Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son $3q - 200p + 1800 = 0$ y $3q + 100p - 1800 = 0$, respectivamente, donde p representa el precio por unidad y q representa el número de unidades.
   a) Obtener en forma algebraica el precio de equilibrio y graficar.
   b) Determinar el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor un impuesto de 27 centavos por unidad.

68) El fabricante de un producto vende todo lo que produce. Los ingresos totales están dados por $y_{TR} = 7q$ y los costos totales por $y_{TC} = 6q + 800$, donde q es la cantidad de unidades que se fabrican y venden.
   a) Hallar el nivel de producción en el punto de equilibrio y graficar
   b) Calcule el nivel de producción en el punto de equilibrio, si los costos *totales* aumentan un 5%.

69) Un fabricante vende un producto en $8,35 por unidad y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de $2.116 y los variables de $7,20 por unidad.
   a) ¿A qué nivel de producción obtendrá utilidades de $4.600?
   b) ¿A qué nivel de producción habrá pérdidas de $1.150?
   c) ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

70) El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se fabrican 13.500 unidades a un precio de $4.50 por unidad. El fabricante no hace oferta de unidades con precio de $1 y los consumidores no demandan unidades a $20. Obtener las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

71) Un fabricante de artefactos está en equilibrio (no tiene ni pérdidas ni utilidades) con un volumen de ventas de $200.000. Los costos fijos son de $40.000 y cada unidad se vende en $5. Determina el costo variable por unidad.

72) Una empresa fabrica sandalias que tienen costo de materiales de $0,80 por par y costo de mano de obra de $0,90. Los costos variables adicionales suman $0,30 por par. Los costos fijos son de $70.000. Si se vende cada par en $2.50, ¿cuántos pares deben venderse para que la compañía no gane ni pierda?

73) Encontrar el punto de equilibrio para una compañía que vende todo lo que fabrica, si sus costos variables por unidad son de $2, los costos fijos son de $1.050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades de producción.

74) Una compañía ha determinado que la ecuación de demanda para su producto es $p = \dfrac{1000}{q}$, en donde p es el precio por unidad para q unidades en cierto período. Determinar la cantidad de demanda cuando el precio por unidad es:
   a) $4
   b) $2
   c) $0,50
   d) Para cada uno de estos precios, evaluar los ingresos totales que recibirá la compañía.

e) ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio?

75) La Monroe Forging Company vende un producto de acero corrugado a la Standard Manufacturing Company y compite en la venta de este producto con los demás proveedores de la Standard. El vicepresidente de ventas de la Monroe considera que reduciendo el precio del producto se podría tener un aumento del 40% en el volumen de unidades que se venden a la Standard. Al gerente del departamento de costos y análisis se le ha pedido analizar la proposición del vicepresidente para que formule recomendaciones con respecto a si es financieramente benéfico este plan para la Monroe Forging Company.
De modo específico se solicita determinar:
a) Pérdidas o utilidades netas con base a la propuesta de precio.
b) Volumen de ventas que se requiere, con el precio propuesto, para obtener las mismas utilidades de $40.000 que se obtienen ahora con el precio y el volumen de ventas actuales.
Utilizar en el análisis los datos de la tabla:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vicepresidente de ventas**
Precio unitario	$2,50	$2,00
Volumen de ventas	200.000 unidades	280.000 unidades
Costos variables		
Total	$350.000	?
Por unidad	$1,75	$1,75
Costos fijos	$110.000	$110.000
Utilidades	$40.000	?

76) Supóngase que los productos A y B tienen ecuaciones de oferta y demanda relacionadas entre sí. Si q_A y q_B son cantidades de A y B, respectivamente y p_A y p_B son sus precios respectivos, las ecuaciones de demanda son:

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$
$$q_B = 26 + p_A - p_B$$

Y las ecuaciones de oferta son:

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$
$$q_B = -4 - p_A + 3p_B$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.