UCES.

TEXTO ORIENTATIVO N° 3

INTRODUCCIÓN AL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS CIENCIAS AGRARIAS.

RAUL FIORENTINO / 12 DE JULIO DE 2018.

Los textos orientativos en formato borrador se destinan a proporcionar información complementaria para los alumnos de la carrera de agronomía (UCES/Cañuelas) que contribuya a promover su acercamiento a temas de gran relevancia en la producción agropecuaria y agroindustrial argentina en las últimas décadas.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LOS USOS DE HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS.

Las herramientas matemáticas tienen, en el análisis de problemas biológicos y bioeconómicos, diversos usos. Se destacan entre ellos: (a) la construcción y validación de modelos biofísicos y bíoeconómicos; (2) el uso de dichos modelos para optimizar procesos asociados con los mismos.

Todo modelo es una abstracción de la realidad, que obliga a un “recorte” de la misma para destacar o valorizar sus conceptos principales y las relaciones causales esenciales entre dichos conceptos principales. Los campos de aplicación de los modelos matemáticos son muy variados. Así, se puede representar a través de un modelo matemático el comportamiento productivo de un espacio territorial definido, por ejemplo un valle considerablemente fértil. También el comportamiento productivo de una sola empresa, etc.

2. CARACTERÍSTICAS DE UN MODELO MATEMÁTICO APLICADO A LA BIOLOGÍA Y A LA BIOECONOMÍA.

La condición esencial de un modelo (constituir una “abstracción” o representación simplificada de la realidad) permite representarlo como el conjunto de relaciones de un número limitado de conceptos, considerados fundamentales para el desarrollo del modelo, y desdeñar otros. Así, un modelo que describe el comportamiento biológico de un bosque natural, se pueden considerar como aspectos esenciales del mismo la velocidad de crecimiento del conjunto de los árboles del bosque, la aptitud forestal de los suelos que albergan a dicho bosque, la evolución de la disponibilidad de agua en los suelos del bosque.

Claramente, se desdeñan en esta enumeración aspectos de interés tales como la capacidad del bosque para brindar otros resultados, tales como la producción de rubros de uso comestible, industrial, etc. Claramente también, se pueden desarrollar, en relación a ese mismo bosque, modelos alternativos que desdeñen las variables que hemos considerado en el ejemplo anterior y utilicen otras.

Este último comentario nos lleva a una reflexión de gran interés, la formulación de un modelo (de sus conceptos determinantes y de sus interrelaciones) está claramente vinculada con el propósito que el analista posee en el período previo a la construcción del modelo. Prevalece entonces una noción utilitaria: los modelos que se construyen en general tienen que servir o ser útiles para algo.

3. LOS MODELOS CONCEPTUALES COMO ORIENTADORES DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS APLICABLES A LA BIOLOGÍA Y A LA BIOECONOMÍA.

Los modelos conceptuales obran como instrumentos fundacionales de los modelos matemáticos aplicables a la biología y a la bioeconómia. Los modelos conceptuales obviamente se expresan en palabras.

Un modelo conceptual tiene aplicabilidad cuando expresa relaciones causales entre conceptos, cuyas “direcciones” están bien definidas. Por ejemplo, la velocidad de crecimiento de los árboles de un bosque está vinculada con el nivel y la periodicidad de suministro de agua al suelo y con la evolución de la disponibilidad de nutrientes: la dirección de causalidad se desplaza desde el agua y los nutrientes (factores causantes) al crecimiento (concepto o valor determinado).

Las causaciones no siempre son entre los modelos (conceptuales y matemáticos) uni-direccionales. Por ejemplo, la velocidad de crecimiento de los árboles de un bosque depende de la disponibilidad de humedad y nutrientes en el suelo, pero dicho crecimiento provoca un aumento en la existencia de raíces en dicho suelo y este aumento mejora la disponibilidad de nutrientes.

Los modelos conceptuales expresan **hipótesis** sobre el comportamiento de determinados procesos o fenómenos. Así por ejemplo, si el modelo conceptual establece “el precio de la carne de pollo en Argentina depende del precio internacional de dicha carne y también del precio de las carnes de vaca y cerdo en Argentina” estoy expresando una hipótesis, cuya validez todavía no he comprobado. Para conocer su grado de aproximación a la realidad tengo que generar instrumentos analíticos y desarrollar un cuerpo de datos útiles verificarla.

4. LOS MODELOS MATEMÁTICOS COMO RESULTANTES DE LOS MODELOS CONCEPTUALES.

El modelo conceptual es “transformado” en un modelo matemático pidiendo en préstamo conceptos fundacionales de la matemática. Así los conceptos pasan a ser **variables** y las relaciones **causales** pasan a ser relaciones **funcionales**. Una **variable** expresa una valoración de un determinado concepto. Una **función** es una regla que establece los mecanismos estables de conexión entre dos o más variables. Así, la función $y=2x$ indica que cuando la variable x aumenta de valor la variable y también aumenta, pero en una proporción mayor.

Las **reglas** que caracterizan a las **relaciones funcionales** están determinadas por valores de los **parámetros** de las ecuaciones. Así, en la expresión caracterizada por las siguientes variables y la siguiente relación funcional:

Yc= Velocidad de crecimiento de los árboles
Dh=Disponibilidad de humedad en el suelo

$Yc=A-B/Dh$

Tenemos que la expresión denota que: (1) el crecimiento es una función “estable” de la disponibilidad de agua; (2) es además una función creciente de dicha disponibilidad; (3) La variable explicada o dependiente es el crecimiento; (4) la variable **explicativa** o **independiente** es la disponibilidad de agua; (5) el impacto de dicha disponibilidad sobre la velocidad de crecimiento siempre se vincula con la misma **forma funcional**; (6) el impacto no es “proporcional”, si se duplica la cantidad de agua, no se duplica la velocidad de crecimiento; (7) en cierto nivel de disponibilidad de agua, el impacto sobre el crecimiento es prácticamente nulo; (8) y en relación al aspecto más importante de esta relación, los valores A y B son parámetros (no cambian por más que cambien los valores de las variables y además gobiernan las características centrales de la relación entre la variable independiente y la variable dependiente.

Los modelos matemáticos, que en general modelan situaciones biológicas complejas, suelen incorporar muchas variables que expresan a su vez diversas interrelaciones entre las mismas. Es por ello que los mismos a menudo se expresan con más de una ecuación. Por ejemplo, un modelo matemático sencillo de mercado pude representarse con tres ecuaciones, del siguiente modo:

Variables:

Qo= oferta de carne bovina
Qd= demanda de carne bovina
Pb= precio de la carne bovina
Pp= precio de la carne de pollo
Kc= condiciones climáticas

A,B,A’, b’, C son parámetros del sistema de ecuaciones

Modelo de funcionamiento del mercado, que incorpora tres ecuaciones:

$Qo= A+B*Kc$
$Qd=Á+B´*Pb+C´Pp$
$Qo=QD$

El pasaje de un modelo conceptual a uno matemático puede generar dos efectos de interés: (a) la posibilidad de conocer con mayor claridad los tipos de datos a registrar para verificar y “validar” el modelo; (b) simplificar notablemente la expresión del modelo, facilitando su comprensión.

Por ejemplo, considérese el siguiente modelo conceptual: “Argentina es el primer exportador mundial de zumo concentrado de manzana, su destino casi único son los EUA, el aporte de Argentina a ese mercado influye en el precio que el país obtiene en el mismo y por lo tanto las ventajas económicas de exportar al mismo. La influencia de la oferta argentina en ese mercado es mayor que la influencia de las exportaciones de otros países considerados en conjunto". Este modelo conceptual puede presentarse mediante la sencilla expresión matemática:

Variables

Qo1= oferta de concentrado argentino de manzana a los EUA
Qo2= oferta de concentrado del conjunto de los restantes exportadores a los EUA.
Po1= Precio del concentrado argentino en el mercado considradao.

Relación funcional:

Po1= A-BQo1-CQo2; donde

A,B,C SON PARÁMETROS DEL SISTEMA DE ECUACIONES
B es mayor que C

Se advierte entonces que con una única y muy sencilla ecuación representa una conceptualización aparentemente compleja.

5. DEL MODELO MATEMÁTICO AL MODELO ESTADÍSTICO.

La relación funcional anterior, que vincula el precio del concentrado argentino (variable dependiente o explicada) con dos variables independientes o explicativas (precios de las exportaciones argentinas e internacionales) revela una relación causal exacta. La observación de la realidad nos dice que: (a) es posible que las relaciones funcionales sean firmes -- efectivamente las variaciones de precios estén determinadas por las variaciones de las cantidades exportadas; (b) es muy probable que dichas relaciones no sean exactas. El modelo estadístico considera como base al modelo matemático, pero señala en su formulación la posibilidad de que que estas relaciones no sean exactas.

Para ello dicho modelo se formula así

E= error de la estimación
Po1= A-BQo1-CQo2+e

Donde e= error de la estimación

La ecuación presentada previamente representa una función de demanda, donde (i) la relación Po1 - Qo1 representa la función de demanda por zumo argentino en los EUA; (ii) la relación Po2 - Qo2 representa la función de demanda por zumo no argentino en dicho mercado; (iii) la relación Po2 – (Qo1+Qo2) representa la función de demanda TOTAL por concentrado de manzana en dicho mercado.

La inclusión de la variable "e" pude interpretarse de la siguiente manera: hace falta algún agregado numérico (positivo o negativo) para asegurar que la relación entre precio y cantidades sea exacta. Ese agregado o sustracción podrá variar si el modelo toma para la formulación del cuadro de datos varios períodos de tiempo (por ejemplo, cuatro valores anuales promedio) en el sentido que en determinados periodos el estimador del error podrá tomar valores positivos y en otros negativos. La estadística aplicada desarrolla modelos analíticos para estimar los valores del error.

La formulación del modelo estadístico es el paso inicial para verificar la hipótesis planteada en el modelo conceptual y en el modelo matemático. La verificación de la hipótesis reclama la disponibilidad de un conjunto de datos que, en el ejemplo considerado, se denominan “series de tiempo” (datos del precio del zumo argentino P, de la cantidad exportada del zumo argentino Qo1 y de la cantidad exportada del zumo no argentino Qo2).

El esquema de análisis es el siguiente (a) en primer lugar analizo la correlación entre Po1 y Qo1 con un análisis gráfico, (b) en segundo lugar analizo la correlación entre Po1 y Qo2 también gráficamente; (c) en tercer lugar y si la inspección de los gráficos revelan una correlación alta, planteo el modelo estadístico, cuya resolución me provee (i) estimadores del valor de los parámetros A,B, C; (c) estimación de los valores del error (tantos valores de error como número de datos yo disponga; (ii) la estimación de la bondad de la estimación (se trata de una medida que evalúa el nivel de correlación entre las dos variable explicativas consideradas en conjunto, y la variable explicada o dependiente. Si el nivel de correlación es elevado entonces puedo señalar que la hipótesis haa sido verificada con un nivel razonable de aproximación.

6. MODELOS MATEMÁTICOS Y OPTIMIZACIÓN.

6.1 Optimización del resultado biológico.

Un modelo biológico puede expresar un proceso o relación que puede ser afectado por la acción humana a través de la manipulación de una o más variables. Por ejemplo, si los rendimientos de un cultivo (trigo) están relacionados con la disponibilidad de nutrientes en el suelo, se puede alterar (incrementar) la disponibilidad de los mismos a través de la fertilización.

Si tengo la posibilidad de realizar varios experimentos que incluyan sucesivos niveles de fertilización y me permitan en cada caso (cada experiencia) medir los rendimientos, puedo determinar la existencia de una correlación alta (siempre “aproximada” entre el nivel de rendimientos y el nivel de fertilización. Puedo entonces determinar el nivel de fertilización que me genera el máximo impacto en los rendimientos. Es probable que más allá de un cierto nivel y por problemas de saturación, los rendimientos se estabilicen y probablemente decrezcan.

En términos matemáticos, la variable dependiente Rt representa los rendimientos del trigo, la variable independiente (explicativa) Nf representa el nivel de fertilización. La respuesta a la fertilización puede representarse por una función matemática que se ajuste a los pares de datos (nivel de fertilización//rendimientos). La función matemática que relaciona rendimientos con fertilización puede representarse como:

Rt = A – 1/Nf

6.2 Optimización del resultado económico.

El mismo modelo biológico puede analizarse desde una óptica económica: la fertilización es costosa y tengo la presunción de que “demasiado fertilizante” me va a ocasionar pérdidas económicas. Para determinar el nivel óptimo de fertilización debo introducir las variables Pt (precio del trigo) y Pf (precio del fertilizante) en la ecuación que representa la respuesta a la fertilización.

La función matemática que ahora interesa es vincula el valor de la producción de trigo con el costo de la fertilización. La misma se expresa como:

Pt*Rt = A’– B’ Pf*Nf.

El óptimo económico y es por lo tanto diferente (muy probablemente vinculado con un menor volumen de fertilizante) que el óptimo biológico). Este óptimo tiene lugar en el nivel de fertilización en relación al cual

Pt*Rt = Pf*Nf. En esa situación el valor económico del fertilizante agregado es compensado por el valor del producto generado; Con un nivel menor de fertilización, el incremento en el nivel de producto es mayor y existe “holgura” para incrementarlo. Con un nivel mayor de fertilización el resultado económico (valor generado – costo requerido) es negativo. La representación gráfica correspondiente será desarrollada en clase.

6.3 Optimización económica de combinaciones de actividades productivas en el marco de restricciones en la disponibilidad de recursos.

Enunciado de ejemplo didáctico.

Este procedimiento puede ilustrarse con un ejemplo sencillo. Un establecimiento posee 24 hectáreas y quiere optimizar sus ingresos. Las alternativas productivas que se le presentan son tres: (i) producir solamente fardos de alfalfa para venta; (ii) engordar novillos, colocando toda la superficie del establecimiento en pasturas que se suministran a los novillos, que a su vez se venden una vez alcanzado el peso de faena; (iii) combinar en la producción y venta las dos actividades.

Los fardos se venden en lotes de 1.000 unidades y para desarrollar una producción de 1.000 fardos de alfalfa en un año se necesitan 1,5 ha. Para engordar 1 novillo en 1 año se requieren 4 ha de pasturas. Además el productor dispone sólo de 200 horas al año para dedicarle a esta actividad. Se necesitan 20 horas para cultivar, cosechar y distribuir un lote de 1000 fardos de alfalfa y se requieren 20 horas para atender cada novillo. Este productor tiene $ 1.200 de presupuesto disponible y sus gastos anuales son de $ 30 por cada lote de alfalfa y de $ 240 por novillo.

La venta de cada lote de 1000 fardos de alfalfa le dará al productor un retorno líquido de $ 50 en tanto que la venta de cada novillo le redituará $ 1.000. El productor desea maximizar los ingresos provenientes de la superficie disponible, dadas las restricciones que limitan a los mismos.

.

Representación matemática del problema

Las **actividades** corresponden a las producciones posibles o los procesos que se pueden efectuar. En este caso las actividades posibles son dos: criar y engordar novillos y producir fardos de alfalfa

La **dimensión o nivel de las actividades,** a determinar por la resolución del problema son también dos:

X_1 = número de novillos engordados por año

X_2 = número de lotes de 1.000 fardos de alfalfa

La **función objetivo** es una ecuación lineal que debe optimizarse (maximizarse o minimizarse, según el planteo del problema) para dar solución al mismo. En las aplicaciones agrarias se expresa principalmente para resolver dos tipos de problemas: (i) maximizar un determinado criterio de valor -- margen bruto total, beneficio total, etc; (ii) minimizar un criterio de valor (costo total, uso de un determinado recurso, etc). En este problema la función objetivo (denominada clásicamente “z”) es.

$$Z\ máx = 1.000\ X1 + 500\ X2$$

Las **restricciones** establecen los límites para el uso de determinados recursos (tierra, mano de obra) que se disponen en cantidades limitadas y que son consumidos por las actividades.

El **consumo de recursos** por cada nivel unitario de actividad se establece en las ecuaciones con los valores numéricos (por ejemplos, 4 es el consumo de tierra para el nivel unitario de la actividad X1; 240 es el consumo de dinero para el nivel unitario de esa misma actividad. Estos valores numéricos se denominan convencionalmente "coeficientes técnicos". En este caso las restricciones son:

4 X1 + 1,5 X2	<= 24	Disponibilidad de tierra.
240 X1 + 30 X2	<= 1.200	Disponibilidad presupuestaria
20 X1 + 20 X2	<= 200	Disponibilidad de mano de obra
X1 y x2	>= 0	Condición de no-negatividad.

El problema se formula entonces como sigue:

Max Z = 1.000 X1 + 500 X2
Sujeto a: 4 X1 + 1,5 X2 <= 24
240 X1 + 30 X2 <= 1.200
20 X1 + 20 X2 <= 200
X1 y x2 >= 0

Resolución gráfica.

La resolución gráfica comprende dos etapas: (a) la determinación del campo de factibilidad, y (b) la obtención del valor extremo de la función objetivo.

a) **Determinación del Campo de Soluciones Posibles.**

La ecuación de la recta que representa la restricción de la tierra, indica que la superficie utilizada por la actividad X_1, más la superficie usada por la actividad X_2 no debe superar las 24 hectáreas. Para representar gráficamente la recta, se determinan dos puntos cualesquiera.

Entonces:

Si X1 = 0 ------ X2 = 24 / 1,5 = 16 fardos

Si X2 = 0 -------X1 = 24 / 4 = 6 novillos

Esta recta corresponde al pleno uso del factor tierra. En cualquier punto de dicha recta el insumo tierra para las dos actividades es igual a la disponibilidad de la misma. Como se muestra en la Figura 1, la superficie gris comprende el campo de factibilidad de todas las soluciones posibles en función de este insumo, representado por el área del triángulo OAB.

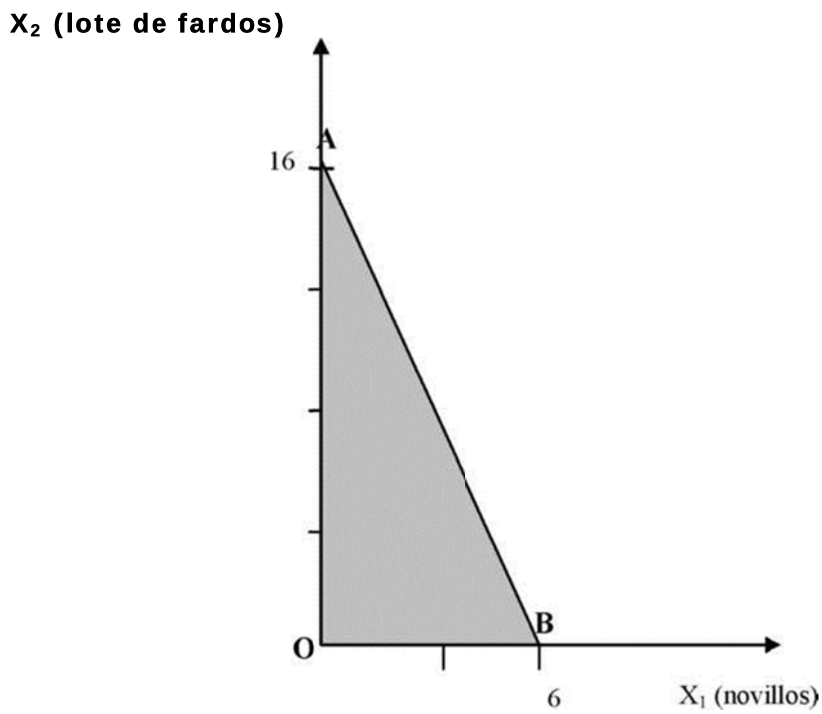

Figura 1. Área de factibilidad delimitada por la restricción de la Tierra

Para la restricción del presupuesto, la ecuación de la recta que expresa el pleno empleo de este factor es la siguiente:

240 X1 + 30 X2 = $ 1.200

Cuando: X1 = 0 -----X2 = 1.200 / 30 = 40 novillos
Cuando X2 = 0 ---- X1 = 1.200 / 240 = 5 novillos

Para la <u>restricción de la mano de obra</u>, la ecuación que corresponde al uso total del recurso es:

20 X1 + 20 X2 = 200 horas

Cuando:

X1 = 0 ====* X2 = 200 / 20 = 10 novillos
X2 = 0 ====* X1 = 200 / 20 = 10 novillos

A partir de las tres restricciones, es posible definir la región de soluciones factibles:

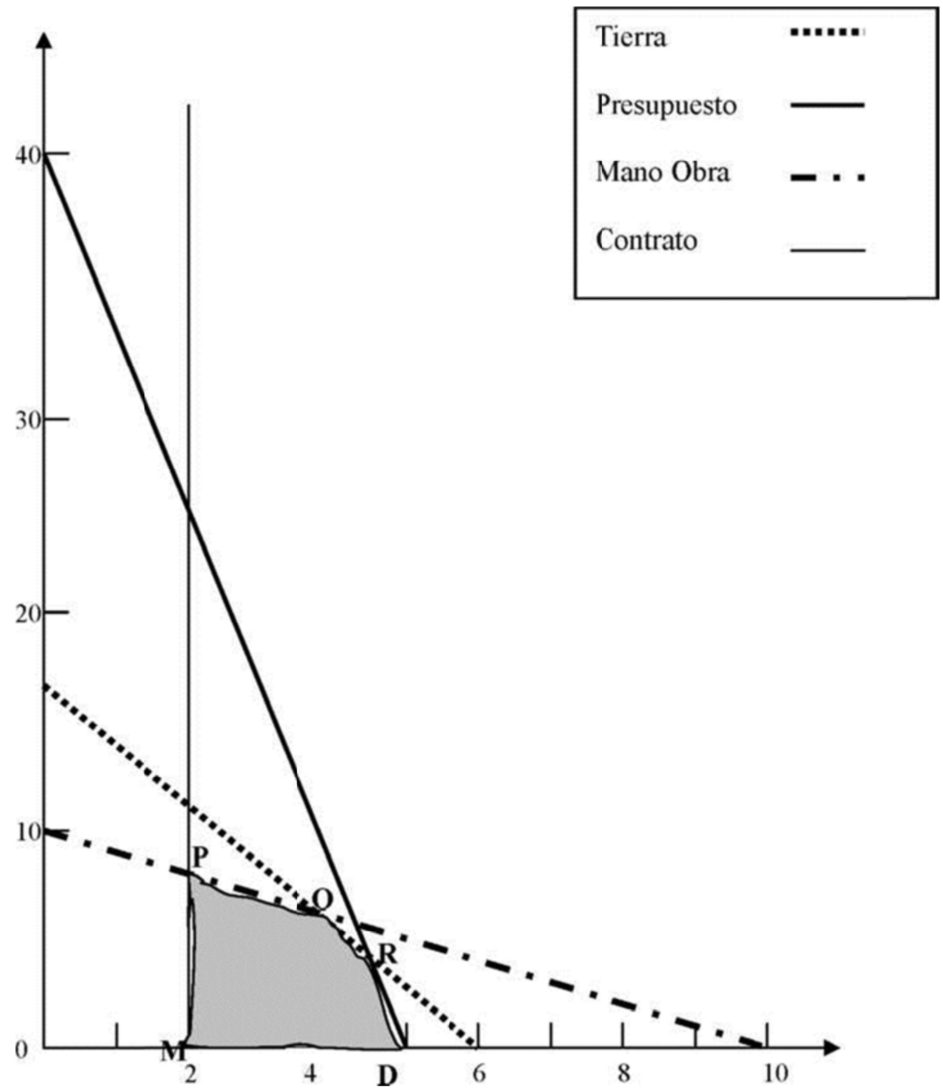

Figura 2. Región de Soluciones Factibles delimitada por todas las restricciones.

(b) Obtención del valor extremo de la Función Objetivo

Obtener el valor extremo de la función objetivo significa, en el Problema planteado, encontrar el punto del polígono que corresponda al mayor valor de Z. La ecuación Z = 1.000 X1 + 500 X2 puede expresarse en la forma:

X2 = (Z/ 500) - (1.000 / 500).X1) = (Z / 500) - 2 X1

donde (Z / 500) es la ordenada al origen y - 2 es la pendiente de la recta.

Z puede tomar diferentes valores, generando una familia de ecuaciones. Atribuyendo diferentes valores a Z, la recta se desplazará paralelamente, cambiando únicamente la ordenada al origen. El propósito es ir aumentando su valor de modo que la recta se aleje del origen hasta que tenga un solo punto en común con el polígono. La Figura 3 presenta las rectas correspondientes a los siguientes valores de la función objetivo: Z = $ 3.000, Z = $ 6.000 y Z = $ 9.000.

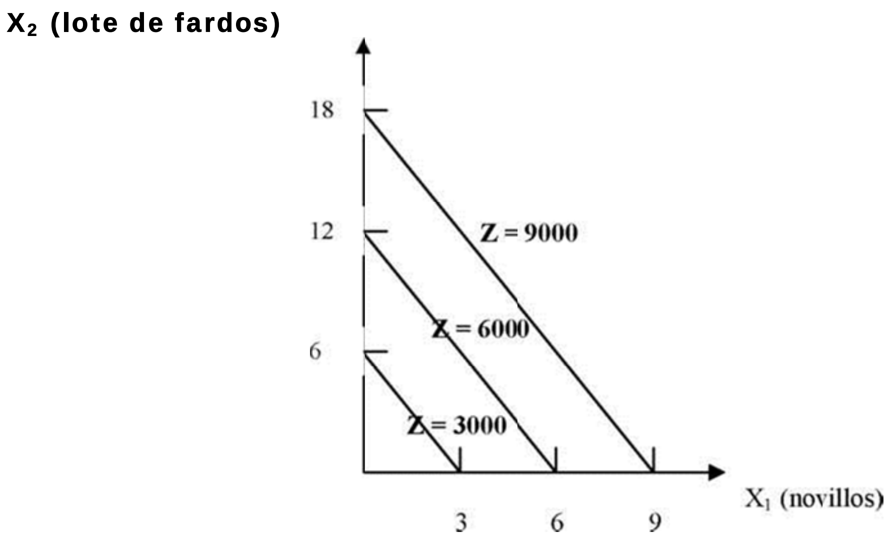

Figura 3. Representación de las rectas para Z = $ 3000, $ 6.000 y $ 9.000

Combinando las figuras 5 y 6 es posible encontrar la solución óptima, esto es, la que presenta el máximo valor de Z dentro del área de factibilidad (Figura 7).

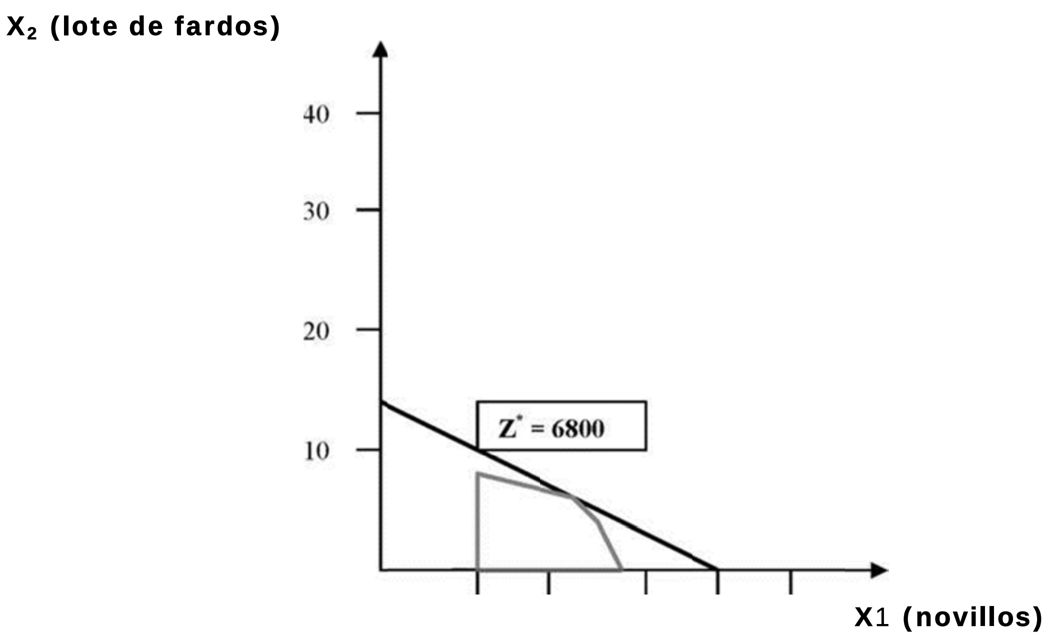

Figura 7. Representación gráfica de la Solución Óptima

Resultados de la programación lineal.

El primer resultado de la PL es el **plan óptimo** con la determinación de las variables (o **actividades)** y su dimensión o nivel. Dicho en términos económicos, la solución señala qué actividades y cuánto de cada una de ellas debe realizar la empresa para optimizar el resultado. Conjuntamente con el plan óptimo es calculado el **valor de la función objetivo**, normalmente el margen bruto total o el beneficio de la empresa en los casos de maximización o el costo mínimo en los casos de minimización. Un segundo resultado es la cuantificación del **uso de los recursos**, es decir cuánto se utilizó de cada restricción.